Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2013

Artur Jorge Afonso Coelho

GeoGebra e iTALC numa abordagem criativa das isometrias

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2013

Artur Jorge Afonso Coelho

GeoGebra e iTALC numa abodagem criativa das isometrias

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Didática especialização em Tecnologia, realizada sob a orientação científica da Doutora Isabel Cabrita, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutora Ana Alexandra Valente Rodrigues
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Dárida Maria Fernandes
Professora Adjunta de Nomeação Definitiva da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Aos meus alunos, pelo que me ensinaram.

À minha mãe, por estar no lugar certo à hora certa.

Ao meu amigo Jorge Gaspar, pela companhia na viagem.

A uma Rosa, pelo tempo que me emprestou.

À minha orientadora, Professora Isabel Cabrita, ... porque nos faz acreditar!

palavras-chave

Matemática, Geometria, CMS, Transformações Geométricas, Criatividade, GeoGebra, Sistemas de Gestão de Atividades de Sala de Aula, iTALC.

resumo

A criatividade é reconhecida, nos dias de hoje, como uma competência essencial ao desenvolvimento dos povos. Neste contexto, a sociedade carece de um modelo de Escola que seja capaz de promover o desenvolvimento da criatividade nos seus alunos, resgatando-os da inevitabilidade de desempenharem um papel secundário no palco da economia global. No entanto, a Escola não tem sabido, querido ou conseguido potenciar este desenvolvimento, cerceando o seu potencial criativo.

Por outro lado, emerge, das diferentes reformas e programas curriculares, um reconhecimento crescente da importância da Geometria, não só no âmbito da Matemática, mas também ao nível da formação global dos indivíduos. A renovação conceptual verificada em alguns tópicos, nomeadamente, nas isometrias, conjugada com as mais recentes orientações internacionais para o seu ensino e aprendizagem exige novas abordagens na sala de aula baseadas em sequências de tarefas matematicamente significantes.

A revolução digital trouxe ferramentas poderosas. Aparecem, assim, oportunidades que exigem o assumir de novas responsabilidades. Proporcionar ambientes de aprendizagem ricos, intelectualmente livres, promotores do pensamento criativo e capazes de desenvolver eficazmente o potencial de cada aluno pressupõe mudanças na forma como se comunica e se explora o mundo. Neste contexto, a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica pode contribuir, por um lado, para que a Matemática seja considerada menos hostil e, por outro, para a constatação da existência de modos mais úteis de utilizar o computador na sala de aula. Estes "ambientes tecnológicos" são potenciados pela utilização de aplicações de gestão de sala de aula (CMS's), como o iTALC.

A partir da conjugação destes aspectos, desenvolveu-se um estudo que, em termos de objetivos, se propôs avaliar a influência de uma abordagem das transformações geométricas no Segundo Ciclo do Ensino Básico, com recurso àquelas ferramentas, no desenvolvimento de competências geométricas, da criatividade e de atitudes mais favoráveis em ralação à Matemática. Para isso, desenvolveu-se um estudo de caso (exploratório) envolvendo três grupos de alunos do 6.º ano de escolaridade, durante a implementação de um conjunto de tarefas de natureza essencialmente exploratória.

A investigação desenvolvida sugere que: a) a criação de uma “atmosfera" de cooperação, colaboração e partilha parece suscitar incrementos nas dimensões da criatividade; b) a utilização dos Ambientes Dinâmicos de Geometria pode facilitar o aparecimento de produções mais criativas; c) o desenvolvimento de conhecimentos e capacidades geométricos parece beneficiar de uma abordagem complementar, que conjugue os ambientes digitais e os ambientes de "papel e lápis"; d) as abordagens diferentes, com carácter mais tecnológico e exploratório, parecem promover atitudes mais favoráveis em relação à Matemática, em geral, e à Geometria em particular.

keywords

Mathematics, Geometry, CMS, Geometric Transformations, Creativity, GeoGebra, Classroom Management Systems, iTALC.

abstract

Creativity is recognized nowadays, as a basic skill, essential to the development of nations. In this context, society needs an Education model that is able to promote the development of creativity in their students rescuing them from inevitability to play a secondary role on the stage of global economy. However, the Education System has not been able to leverage this development, often decreasing their creative potential.

On the other hand, emerges, from different reforms and curriculum programs, a growing recognition of the importance of Geometry, not only in the range of Mathematics but also in terms of the whole development of the individuals. Conceptual renewal verified in some topics, in particular, isometries, combined with the latest international guidelines for its teaching and learning demands new approaches in the classroom based in significant mathematical task sequences.

The digital revolution has brought powerful tools. Therefore, opportunities appear that require the assumption of new responsibilities. Implementing rich learning environments, promoters of creative thinking and able to effectively develop the potential of each student means changes in how we communicate and explore the world. In this context, the use of Dynamic Geometry Environments can contribute, on one hand, that Mathematics is considered less hostile and, secondly, to confirm the existence of more useful ways to use computers in the classroom. These "technological environments" are enhanced by the use of Classroom Management Systems (CMS's), such as iTALC.

From the combination of these aspects, a study has been developed that, in terms of objectives, was proposed to evaluate the impact of an approach to geometric transformations in early grades, using these tools, in the development of geometrical skills, creativity, and more positive attitude towards Mathematics. For this, we developed a case study (exploratory) involving three groups of students in the 6th grade, during the implementation of a set of tasks, essentially exploratory. The research carried out suggests that: a) the creation of an "atmosphere" of cooperation, collaboration and sharing, seems to raise increments in the dimensions of creativity; b) the use of Dynamic Geometry Environments can help the emerging of more creative productions; c) the development of knowledge and geometrical skills seems to benefit from a complementary approach that combines digital environments and "Paper and Pencil" environments; d) different approaches, with a more technological and exploratory nature seem to promote more favourable attitudes towards Mathematics in general, and Geometry in particular.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE QUADROS

ACRÓNIMOS

ADGD	Ambiente Dinâmico de Geometria Dinâmica
AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
APM	Associação de Professores de Matemática
CMS	Classroom Management System
DEB	Departamento da Educação Básica
DGEBS	Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário
DGIDC	Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular
EVT	Educação Visual e Tecnológica
GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional
iTALC	Intelligent Teaching And Learning with Computers
LAN	Local Area Network
ME	Ministério da Educação
MIT	Massachusetts Institute of Technology
NACCCE	National Advisory Committee on Creative and Cultural Education
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PISA	Programme for International Student Assessment
PMEB	Programa de Matemática do Ensino Básico
PTE	Plano Tecnológico da Educação
RFB	Remote Framebuffer (protocolo de acesso remoto a interfaces gráficos)
TCP	Transmission Control Protocol (protocolo de controlo de transmissão)
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TIMMS	Trends in International Mathematics and Science Study
VPN	Virtual Private Network (rede privada virtual)

INTRODUÇÃO

"Creativity is just connecting things. When you ask creative people how they did something, they feel a little guilty because they didn't really do it, they just saw something. It seemed obvious to them after a while. That's because they were able to connect experiences they've had and synthesize new things."
Steve Jobs

Apesar de utilização quotidiana e aparentemente consensual, o termo criatividade é objeto de uma grande variedade de definições que concorrem para uma certa ambiguidade sobre o seu conceito. Esta indefinição proporciona o seu uso numa grande variedade de situações que expressam perspectivas e complexidades diferentes com variações ao longo da história das civilizações.

Depara-se pois com uma diversidade de teorias e modelos que ensaiam explicações e definições acerca do pensamento criativo e dos processos racionais associados. Se se observar com alguma atenção estes ensaios, percebe-se a existência de uma ideia sobre criatividade comum a quase todos eles, que se traduz na sua associação com o potencial de geração de ideias originais e portanto, únicas.

A origem divina é uma das mais antigas conceções da criatividade mas também surge associada à loucura e à irracionalidade na antiguidade relacionando-se, mais tarde, com a genialidade intuitiva altamente desenvolvida e de ocorrência rara. Sendo agora considerada uma manifestação inerente à vida, foi já a partir do século XIX que esta temática foi alvo de um tratamento mais científico quando vários trabalhos na área da Psicologia procuraram entender que condições e fatores facilitariam o potencial humano para a autorrealização (Alencar, 1996a).

Abordagens recentes estabelecem diferentes dimensões para a manifestação da criatividade. Neste contexto, têm sido desenvolvidos vários estudos com o objetivo de investigar as variáveis do contexto sócio-histórico-cultural que interferem na produção criativa e potenciam o pensamento criativo.

Alencar (2004) refere que os estudos sobre criatividade revelam que todos os indivíduos são criativos, em menor ou maior grau, e que um dos fatores que interfere no potencial criativo de um indivíduo é a educação que recebe, já que estimula nele atitudes menos ou mais positivas relativamente às suas capacidades e potencialidades criativas. Afirma, ainda, que o sistema educativo contém inúmeras falhas e distorções onde “o espaço reservado para a exploração, para a descoberta, para o pensamento criador, é reduzido e às vezes inexistente” (p.9).

É neste contexto que os professores são confrontados com o imperativo de ajudar os seus alunos a pensar criativamente, desempenhando, no processo do desenvolvimento das suas habilidades criativas, um papel fundamental.

Aos alunos devem ser disponibilizadas oportunidades para o desenvolvimento do seu potencial criativo e, na área da educação, aparecem agora oportunidades que forçam o ato de assumir novas responsabilidades.

As tecnologias informáticas trouxeram ferramentas poderosas capazes de facilitar os processos de ensino e de aprendizagem. Utilizar de forma competente e eficaz estas ferramentas é um desafio que é colocado aos professores e aos seus alunos. Ter uma sala de aula cheia de ferramentas tecnológicas é diferente de estas estarem incorporadas naturalmente no currículo e em benefício dos alunos.

Nos dias de hoje, construir um ambiente de aprendizagem rico, onde o conhecimento é entendido como uma construção social livre de dogmas inibidores da criatividade e capaz de desenvolver eficazmente o potencial de cada aluno, carece de mudanças na forma como se comunica, como se interage e se explora o mundo.

1. Problemática do Estudo

> “Um ensino das ciências, que não seja acompanhado de uma boa educação estética e que não fale à imaginação dos alunos, está condenado a priori, pela sua própria aridez, a afastar muitos dos melhores talentos. Por isso acontece, especialmente entre nós, que muitos se voltam para outros interesses. Possamos nós, professores, orientar em boa parte a imaginação poética da nossa juventude, para sonhos lúcidos, no campo imenso onde germinam e florescem as grandes ideias da ciência contemporânea."
> José Sebastião e Silva (1977, pp.124-125)

A criatividade é vista como a chave de um futuro profícuo. Como algo que os professores e os seus alunos serão chamados a construir, este futuro não está predeterminado. É, portanto, essencial que a Escola promova o desenvolvimento da criatividade nos seus alunos sob pena de estes correrem um sério risco de se tornarem numa espécie de classe operária na economia global da informação (Adams & Hamm, 2010). Neste sentido, o desenvolvimento do pensamento criativo é, como refere Cropley (2003), uma das competências básicas necessárias para este século.

Sendo a criatividade uma capacidade transversal a todas as áreas do conhecimento, a Escola não tem sabido ou conseguido promover o seu desenvolvimento cerceando, assim, as reações dos alunos (Robinson & Aronica, 2009).

Como refere Ribeiro (2005), no respeitante especificamente à Matemática e apesar de avanços já verificados quer ao nível da alteração dos currículos quer ao nível das recomendações metodológicas, na prática, a situação não tem registado alterações significativas. Pelo contrário, algumas investigações (Ribeiro, 1995; Guimarães, Belfort & Bellemain, 2002; Borralho, 2001, 2003; Hiebert 2003; Ponte & Serrazina, 2004; Ruthven, 2008; Lu, 2008) apontam no sentido de que a Matemática continua a ser uma disciplina que se ensina de uma forma mais ou menos rotineira sucedendo-se, sistematicamente, os momentos de prática aos de exposição de assuntos - abordados de forma estanque e sem conexões com outras áreas disciplinares e com a própria vida diária (Serrazina, 1991; Ponte, 1992; Guimarães, 2003; Veloso, 2004a).

Bento de Jesus Caraça, no prefácio do seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, escreve:

> "A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. […] A Ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. " (Caraça, 1998, p.xxiii).

Esta visão permanece assombrosamente atual.

Das diferentes iniciativas que, ao nível central, deram corpo a reformas em Portugal, assinala-se o reajustamento dos Programas de Matemática para o Ensino Básico. O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) defende mudanças no ensino e na aprendizagem da disciplina, com abordagens novas sobretudo no âmbito da Geometria. Esta adquire uma maior importância como tema proeminente no currículo, e dentro deste, o tópico relativo às transformações geométricas merece um lugar de destaque que preconiza, também, uma abordagem diferente que implica novas formas de entender, de ensinar e de aprender as isometrias e a noção de simetria.

Nas Orientações Metodológicas Gerais do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), sugere-se que se recorra a tecnologias informáticas, na exploração de diversas situações Matemáticas. De facto, aprender Geometria recorrendo a ambientes computacionais dinâmicos, como o GeoGebra ou Geometer´s Sketchpad, é diferente de o fazer recorrendo ao papel e instrumentos tradicionais. Os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica - ADGD - libertam o seu utilizador de tarefas mecânicas e rotineiras, de construção, de medição e de cálculos, deixando espaço para um trabalho mais profícuo e ativo em Geometria. A utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica pode contribuir, por um lado, para que a Matemática seja considerada menos hostil e, por outro, para a constatação da existência de modos mais úteis de utilizar o computador na sala de aula (Ribeiro, 2005).

A construção de "ambientes tecnológicos" de aprendizagem capazes, por um lado, de aumentar o grau de envolvimento dos alunos nas tarefas e de os manter focados nas mesmas e, por outro, de promover uma comunicação clara do ponto de vista académico e comportamental que se caracterizem por ser verdadeiramente colaborativos e cooperativos é grandemente facilitada pela utilização dos CMS (Classroom Management Systems). No entanto, e apesar de todos os esforços institucionais para a generalização do uso de computadores, em particular na Matemática, a utilização destas ferramentas continua a ser feita nas escolas de forma esporádica e desadequada. Nesta linha, Ruthven et al. (2008), referidos por Lu (2008) determinam claramente que, apesar do incentivo oficial e do investimento realizado para integrar as tecnologias digitais no ensino da Matemática, o impacto dessa implementação, na sala de aula, é ainda limitado.

2. Questões e Objetivos de Investigação

A criatividade e a utilização de ferramentas tecnológicas, nomeadamente a utilização de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica enquadrados por um Sistema de Gestão (de atividades) de Sala de Aula (CMS), foram as principais áreas que superintenderam a escolha do tema para esta dissertação de mestrado. Pretendia-se uma resposta à questão:

“Em que medida uma utilização adequada de ferramentas tecnológicas favorece o desenvolvimento de competências Matemáticas transversais e específicas?”

Consequentemente tenciona-se, em termos de objetivos, avaliar o impacto de uma abordagem das transformações geométricas no Segundo Ciclo do Ensino Básico, com recurso ao GeoGebra e ao iTALC, no desenvolvimento:

-(i) de uma mais sólida apropriação de conceitos geométricos envolvidos;

-(ii) da criatividade;

-(iii) de uma atitude mais favorável em relação à Matemática.

Procura-se, portanto, de alguma forma, contribuir, com este estudo, para um melhor entendimento dos fenómenos associados à didática da Matemática quando se socorre da tecnologia e de que modo esta relação determina, nos anos iniciais de escolaridade, nomeadamente o desenvolvimento de conhecimento e capacidades geométricos, o aparecimento do pensamento criativo e de atitudes mais positivas por parte dos alunos face à disciplina.

3. Estrutura da Dissertação

Este documento inicia-se, na sua introdução, com a definição da problemática, a formulação da questão e dos objetivos da investigação descrevendo-se, em seguida, a estrutura do documento.

No primeiro capítulo, apresenta-se o enquadramento teórico do estudo, centrado em três eixos estruturantes: a criatividade em Matemática, o ensino das transformações geométricas no ensino básico e a utilização das tecnologias na abordagem da Matemática. No que diz respeito ao primeiro eixo, apontam-se algumas propostas de definição de criatividade assim como estratégias para o desenvolvimento do pensamento criativo nos alunos de Matemática, seguido de alguns modelos de avaliação da criatividade em Matemática.

Segue-se uma análise da temática das transformações geométricas no currículo do ensino básico referindo-se, também, algumas notas sobre a sua abordagem didática. Em seguida e, no âmbito do terceiro eixo estruturante, reflete-se acerca da utilização das ferramentas tecnológicas e a sua integração na sala de aula como ferramentas operativas, nomeadamente os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica, as aplicações de gestão de actividades de sala de aula (CMS) e também sobre a utilização de material de carácter manipulável e instrumental.

No segundo capítulo, Método, descrevem-se e fundamentam-se as opções metodológicas, com incidência no estudo de caso; apresenta-se o esquema de investigação; caracterizam-se os participantes, as técnicas e os instrumentos de recolha de dados e faz-se a descrição do estudo, com referência às etapas, procedimentos e tarefas da sequência didática. Finalmente, descreve-se o processo de tratamento a que foram submetidos os dados e como serão apresentados no capítulo seguinte.

No terceiro capítulo, procede-se à descrição e análise dos dados, concretamente, com três grupos de alunos, relativamente ao conhecimento e capacidades geométricos, às dimensões da criatividade, e à sua atitude face à Matemática.

No quarto capítulo, apresentam-se as principais conclusões resultantes da análise de todos os dados recolhidos e tecem-se algumas considerações finais.

A dissertação é complementada por uma lista bibliográfica e pelos anexos que constituíram o alicerce desta investigação.

CAPÍTULO I

Enquadramento Teórico

O estudo que nos propomos efectuar está enquadrado, em termos teóricos, por três eixos estruturantes: Criatividade em Matemática, Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano e Tecnologias em Matemática.

A Criatividade em Matemática desdobra-se em quatro linhas distintas: conceito e dimensões de criatividade, criatividade em Matemática, abordagens criativas e para a criatividade e avaliação da criatividade em Matemática.

Relativamente ao segundo eixo, Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano, analisam-se orientações didáticas e curriculares para a Geometria em geral e, mais concretamente, para o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas, essencialmente no 2.º Ciclo do Ensino Básico. Abordam-se, também, alguns apontamentos teóricos sobre isometrias e sobre o conceito de simetria.

No terceiro eixo, Tecnologias em Matemática, discutem-se alguns fundamentos teóricos que sustentam a importância da utilização da tecnologia no ensino da Matemática, mais concretamente, a utilização de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD), nomeadamente, o GeoGebra, como ferramenta complementar à instrumentação tradicional, papel e lápis. Analisam-se, ainda, aspectos relacionados com a utilização em salas TIC, de Software de Gestão de Atividades de Sala de Aula (CMS), concretamente o iTALC.

1. Acerca da Criatividade

"Creativity is the ability to introduce order into the randomness of nature."
Eric Hoffer

Os estudos sobre criatividade no âmbito das ciências têm pouco mais de meio século e, face às rápidas e profundas transformações culturais, sociais, económicas e tecnológicas que estão a ocorrer no mundo globalizado, merecem agora especial atenção.

Adams e Hamm (2010) sugerem que a criatividade é condição para um alto índice de desenvolvimento na nova (atual) sociedade da informação global. O desenvolvimento do pensamento criativo é também designado por Cropley (2003) como uma competência básica necessária que implica mudanças profundas e urgentes em contexto escolar.

Craft (2001) reconhece-a como uma capacidade básica para a sobrevivência, bem como para o sucesso futuro. Este entendimento traduz uma quebra na associação entre criatividade a genialidade de indivíduos singulares, excepcionais e de ocorrência rara passando a ser encarada como uma característica passível de ser potenciada na população escolar em geral (Silver, 1997).

Neste contexto, a escola desempenha, então, um papel central no desenvolvimento da criatividade devendo, para isso, implementar práticas favoráveis ao aperfeiçoamento do potencial criativo dos seus alunos (Fleith & Alencar, 2005).

1.1. Conceito de Criatividade

"Creativity is almost infinite. It involves every sense - sight, smell, hearing, feeling, taste, and even perhaps the extrasensory. Much of it is unseen, nonverbal, and unconscious. Therefore, even if we had a precise conception of creativity, I am certain we would have difficulty putting it into words."
Torrance (1988)

Torna-se necessário, e desde logo, encontrar uma definição satisfatória e consensual para criatividade, facto que não tem sido pacífico e, de forma alguma, fácil (Morais, 2011). Não obstante esta dificuldade, existem bastantes definições sobre criatividade.

Diversos autores (e.g., Torrence, 1974; Silver, 1997; Craft, 2001; Mann, 2006; Leikin, 2009; Meissner, 2011; Morais, 2011; Zamir & Leikin, 2011), debruçaram-se sobre a complexidade do termo, não se tendo alcançado, no entanto, uma definição unânime. A perspetiva de uma visão global sobre o fenómeno criativo carece, neste momento, de estudos aprofundados (Craft, 2001, Pereira, 2007).

As múltiplas definições propostas refletem as diferentes opiniões relacionadas com a criatividade.

Numa linha de pensamento focada no indivíduo, Weisberg (1988), referido por Silver (1997), considera a criatividade um fenómeno associado à genialidade e ao talento individual, apanágio de uns quantos indivíduos excecionais que, de forma célere e natural, mobilizam processos mentais excecionais. Consequentemente, à luz deste entendimento, a criatividade não poderá ser objetivamente influenciada pela instrução, já que o pensamento criativo seria o resultado de características mentais intrínsecas de uma pessoa.

Amabile (1995) sugere, também, que "Para a maioria dos leigos, e muitos pesquisadores, criatividade é uma qualidade de pessoas, uma constelação de traços de personalidade, características cognitivas e estilo pessoal." (p.424).

Outros autores consideram aspectos diversos, numa linha de pensamento diametralmente oposta.

De Bono (1995), referido por Magalhães (2007), defende que o fenómeno não é exclusivo de alguns e, segundo Silver (1997), está intimamente relacionado com um conhecimento profundo e flexível dos conteúdos, conjugado com longos períodos de trabalho e reflexão e, consequentemente, a criatividade não deverá ser encarada de forma centrada na excecionalidade individual mas é passível de desenvolvimento e potenciação através da instrução. Sugere, então, o seu desenvolvimento na população escolar em geral em oposição clara a uma conceção centrada no indivíduo.

Nesta perspectiva, Nakamura e Csikszentmihalyi (2003), citados por Gontijo (2007, p.24), defendem que "Toda a pessoa é potencialmente criativa".

Sternberg e Lubart (1999) consideram-na como a capacidade de produzir algo que é simultaneamente original e útil, ideia também partilhada por Martinez (2006).

Circunscrevendo-se especificamente à Matemática, Krutetskii (1976) advoga que a criatividade envolve a capacidade de formular problemas pouco complexos, encontrar formas de resolver esses problemas, inventar fórmulas e teoremas, deduzir autonomamente fórmulas e encontrar resoluções originais de problemas não tradicionais.

Por outro lado, Gontijo (2007) entende a criatividade em Matemática como "a capacidade de apresentar diversas possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns" (p.37).

Por seu lado, admitindo a complexidade da sua concetualização, Zamir e Leikin (2011) consideram que a criatividade deixou de ser uma característica pessoal estática, que não pode ser alterada, e passou a ser entendida como uma característica do desenvolvimento pessoal e com um carácter dinâmico. Esta visão confere uma importância acrescida ao desenvolvimento das atividades na sala de aula e aumenta a responsabilidade dos sistemas de ensino e dos professores com seus os alunos.

Ao entender a criatividade como uma característica que pode ser desenvolvida na escola, Leikin (2009a) diferenciou criatividade absoluta de criatividade relativa. A primeira está relacionada com grandes feitos históricos, a descobertas a nível global, invenções de matemáticos ilustres. A segunda está ligada às descobertas protagonizadas por um indivíduo ou grupo de indivíduos, como resultado da imaginação humana.

Fleith e Alencar (2005), num esforço de organização e sistematização, sugerem, para as diferentes definições de criatividade, uma classificação em quatro categorias, em função da sua incidência na pessoa, no produto, no processo ou no ambiente. As autoras, referindo Tardiff e Sternberg (1988), mencionam as características cognitivas, os traços de personalidade e as experiências durante o desenvolvimento como os três aspectos a considerar nas definições que se centram no indivíduo. Consideram a emergência de um produto novo (Alencar & Fleith, 2003a) o aspecto distintivo das definições da segunda categoria, quer seja uma ideia ou uma invenção original, quer seja a reelaboração ou aperfeiçoamento de produtos ou ideias já existentes; referem-se ao processo no desenvolvimento de produtos criativos como o traço comum das definições a ser incluídas na terceira categoria. As definições que se enquadram na quarta categoria incidem sobre o papel facilitador ou inibidor do ambiente no desenvolvimento de habilidades criativas.

1.2. Criatividade em Matemática

"Deixem-nos ensinar demonstrando de todas as maneiras possíveis.
Mas deixem-nos também ensinar adivinhando."
(Polya, 1962)

Numa tentativa de definir criatividade em Matemática, Ervynck (1991) propôs um modelo assente em três estágios. Para este autor, o primeiro estágio caracterizava-se pelo uso, por parte do indivíduo, de regras matemáticas sem ter uma base e fundamentação teórica sólida e constituía a etapa preliminar do processo. Seguir-se-ia um segundo estágio, caracterizado pela aplicação de técnicas matemáticas através do uso repetido de algoritmos e, finalmente, o terceiro, que assentaria na tomada de decisões sem recurso a algoritmos. Este último era considerado pelo autor como o momento em que ocorria a verdadeira criatividade matemática.

Mann (2005) propôs 21 características, referidas por Carlton (1959), identificadas em alunos que demonstravam pensamento criativo em Matemática, destacando: a sensibilidade estética; a deteção de problemas em determinadas informações ou em situações que passam desapercebidas a outros alunos; a motivação para trabalhar independentemente do professor e dos colegas; a tendência para especular quando se alteram uma ou mais hipóteses de um problema; o prazer de trabalhar com símbolos matemáticos; a intuição acerca de resultados; a convicção de que todos os problemas têm uma solução e a persistência em trabalhar com demonstrações ou com problemas particularmente difíceis.

Meissner (2011) enumera também um conjunto de termos que relaciona com a criatividade: autoconfiança, complexidade, desafio, envolvência, flexibilidade, fluência, intuição, imaginação, interesse, inspiração, originalidade e independência.

A criatividade em Matemática está relacionada, segundo de Krutetskii (1976), com a capacidade de formulação e resolução de problemas assim como de inventar fórmulas e teoremas, fazer deduções e encontrar resoluções originais.

Alguns autores discordam da ideia, que parece ser comum, de considerar que criatividade existe num plano afastado senão mesmo antagónico da Matemática. Pehkonen (1997) considera que o pensamento flexível, intimamente relacionado com a criatividade, é fundamental para a resolução de problemas e Bishop (1981), referido por Pehkonen (1997), considera que o pensamento criativo e o pensamento analítico são complementares.

Mann (2006) refere que não existe uma definição para a criatividade em Matemática pois existem inúmeras maneiras de a expressar, permanecendo ainda como desafio a constituição de um consenso sobre a concetualização deste tipo de criatividade (referido por Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa & Fonseca, 2012). No entanto, este autor considera que, da análise das múltiplas definições e correspondentes categorias, emergem três aspectos que são comuns: o envolvimento do pensamento convergente mas, principalmente, o divergente; a referência a três dimensões fundamentais da criatividade, a fluência, a flexibilidade e a originalidade; e a relação com a formulação e a resolução de problemas (incluindo elaboração e generalização).

Relativamente ao pensamento convergente e divergente, estes surgem necessariamente relacionados com a inteligência, com o pensamento crítico e com a resolução de problemas. Se o pensamento convergente é uma forma de pensar orientada para a obtenção de uma resposta correta e eficaz a uma determinada situação, o pensamento divergente (ou flexível) implica a exploração cognitiva de múltiplas soluções diferentes e inovadoras para o mesmo problema. A intuição sobrepõe-se ao raciocínio lógico-dedutivo que caracteriza o pensamento convergente sendo, consequentemente, mais espontâneo e livre.

Conway (1999) refere-se à flexibilidade como a capacidade que os alunos com mais sucesso a Matemática possuem pois permite-lhes utilizar diferentes abordagens na resolução de um problema. Assim, a flexibilidade, entendida como a capacidade para pensar de modos diferentes, está associada a mudanças de ideias relativas a um determinado assunto no sentido de procurar soluções diferentes na resolução de um problema ou a sua solução ótima (Vale, 2012).

A fluência como capacidade de produzir um grande número de ideias diferentes sobre um mesmo assunto pressupõe o uso de conhecimentos básicos e uma grande facilidade em estabelecer associações. A originalidade traduz a capacidade de pensar de forma única, produzindo ideias novas, singulares, ou radicalmente diferentes (Silver, 1997). "[...] Na sala de aula, pode ser manifestada quando um aluno analisa várias soluções a um problema, métodos e respostas e consegue criar outra que seja diferente." (Vale, 2012, p.191).

Silver (1997) refere que a investigação tem mostrado que a resolução e a formulação de problemas em Matemática estão intimamente relacionados com a criatividade. A par da sua resolução, a formulação dos mesmos constitui-se como uma atividade de grande importância numa aula de Matemática, promovendo o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos e a compreensão dos processos que são suscitados pela sua resolução.

1.3. Uma Abordagem Criativa e Para a Criatividade

Diferentes razões têm sido apontadas por diversos autores sobre a necessidade e importância de um desenvolvimento mais acentuado da criatividade ao longo da vida. Alencar (2007) sugere uma associação entre a necessidade de criar e o equilíbrio psicossomático e social do indivíduo, considerando que a atividade criativa está acompanhada de sentimentos de satisfação e prazer. Considera, também, a necessidade de soluções criativas para problemas imprevisíveis, especialmente num cenário de incerteza complexo e dinâmico, e o facto de que "sufocar o desenvolvimento do potencial criador equivale a limitar as possibilidades de uma realização plena e a expressão de talentos diversos" (idem, p.45).

Cropley (2003) salienta a extrema importância do desenvolvimento do pensamento criativo como resposta aos desafios deste século. Esta preocupação, também visível na Lei de Bases do Sistema Educativo (ME, 1986) e no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) parece, contudo, não ter dado origem a muitas discussões e orientações sobre estratégias a adotar para promover a criatividade nos alunos.

Diversos estudos internacionais realizados no âmbito da criatividade matemática centram-se na procura e compreensão dos fatores facilitadores e inibidores da sua expressão, com o propósito de definir estratégias para o seu desenvolvimento.

Alencar (1990), Fleith e Alencar (2005) têm apontado o clima de sala de aula como um fator crítico no desenvolvimento da criatividade na Escola. Assim, alertam para a necessidade de se "construir" um ambiente que reconheça e encoraje as ideias criativas. As autoras defendem que os alunos devem ser preparados para questionar, refletir, mudar e criar, sendo que uma das principais razões para justificar a necessidade de se criarem melhores condições para o desenvolvimento e manifestação do pensamento criativo em sala de aula advém da necessidade de se preparar o aluno para resolver problemas. Sternberg e Lubart (1999) defendem mesmo que, sem este ambiente e mesmo na presença de todos os fatores facilitadores do pensamento criativo, a manifestação da criatividade poderá não ocorrer.

Neste contexto, Fleith e Alencar (2005) sugerem algumas características que um ambiente desta natureza deverá apresentar. Assim, este clima de sala de aula deve ser capaz de:

- proteger o trabalho criativo do aluno da crítica destrutiva;
- desenvolver nos alunos da habilidade de pensar, de explorar consequências, de sugerir alterações e aperfeiçoamentos das próprias ideias;
- encorajar os alunos à reflexão acerca do que gostariam de conhecer melhor e escolher que problemas gostariam de investigar;
- impedir que o aluno se deixe abater pelas limitações do contexto, estimulando-o a contornar os obstáculos com o auxílio dos seus próprios recursos criativos;
- envolver os alunos na busca de soluções para problemas do mundo real;
- estimular os alunos a elaborar produtos originais.

Uma vez que as pessoas são mais propensas a atuar criativamente numa dada tarefa quando sentem prazer na sua realização (Amabile, 1996; Alencar & Fleith, 2003a), "a motivação intrínseca, centrada na tarefa, é de inestimável importância para a criatividade […]" (Alencar & Fleith, 2003a, p.3).

De Bono (2003), constatando que o processo de ensino e de aprendizagem se encontra centrado no raciocínio lógico, afirma que este se tem instituído como um entrave ao desenvolvimento do pensamento criativo. Também neste sentido, Silver (1997) refere as exíguas oportunidades que a escolaridade fornece à maioria dos alunos para experimentar a criatividade em Matemática, apesar da sua íntima relação com ela.

Neste contexto, Bolden, Harries e Newton (2009), referidos por Shriki e Lavy (2012), especificam que uma aparente demissão dos professores na implementação de um ambiente de aprendizagem favorável à promoção e ao desenvolvimento do pensamento criativo dos alunos advém, entre outras causas, do seu insuficiente conhecimento sobre o assunto.

Roldão (2005) sustenta que os professores continuam a ensinar e a avaliar em função de conteúdos a memorizar e não de competências a desenvolver e Vale (2011) propõe mesmo repensar a formação inicial e contínua de modo a que os professores possam não só ensinar Matemática de forma criativa como também potenciar a criatividade nos seus alunos. Nesta perspetiva, Zamir e Leikin (2011) consideram que é possível desenvolver competências nos professores com o objetivo de melhorar a criatividade neles próprios e nos seus alunos.

Parece existir, também, a convicção de que professores criativos podem potenciar a criatividade dos alunos e que a criatividade na aprendizagem emerge em ambientes de liberdade e incentivo específico à criatividade.

No entanto, Martinez (2006) refere que se encontram alunos que desenvolvem pensamento criativo num ensino marcadamente tradicional e professores que realizam um trabalho pedagógico altamente criativo que não se traduz em resultados significativos no desenvolvimento de criatividade dos seus alunos. Martinez (idem) acrescenta ainda que a relação entre a criatividade no processo de aprendizagem e a criatividade no trabalho pedagógico, apesar de estreita, não se caracteriza pela sua linearidade. No entanto, e apesar da não existência de uma relação clara de causa-efeito, considera-se essencial realizar um trabalho pedagógico criativo, capaz de promover a flexibilidade, de abrir portas ao que é novo, de estimular a habilidade de propor soluções inovadoras.

A limitação da criatividade na sala de aula reduz a Matemática à memorização e domínio de um conjunto de destrezas e regras, que fazem desvanecer progressivamente a curiosidade e o entusiasmo natural de muitos alunos (Meissner, 2011) e favorece, em simultâneo, como refere Lithner (2006), o desenvolvimento de um raciocínio do tipo imitativo.

Assim, o ensino da Matemática exige professores criativos, que ensinem para a criatividade através de abordagens imaginativas, dinâmicas e inovadoras que estimulem a imaginação dos alunos e o aparecimento de novas ideias (Jeffrey & Craft, 2004). Morris (2006), Zamir e Leikin

(2011), também nesta linha de pensamento, sugerem que estas abordagens tornam o processo de ensino e de aprendizagem mais motivador, efetivo e interessante.

Partindo do pressuposto que a criatividade pode ser desenvolvida e que qualquer indivíduo tem potencial para ser criativo, Craft (2005), referida por Lin, (2011), sugere a adequação de estratégias pedagógicas capazes de a promover na sala de aula criando ambientes de aprendizagem favoráveis através de uma abordagem didática criativa.

Zamir e Leikin (2011) consideram que ensinar com criatividade e para a criatividade pode reforçar o processo de aprendizagem.

No relatório do Comité Nacional Consultivo para a Criatividade, Cultura e Educação, distingue-se entre ensino criativo e ensino para a criatividade. O primeiro é definido como “o uso de abordagens criativas para tornar a aprendizagem mais efetiva e interessante” (NACCCE, 1999, p. 89). O segundo procura referenciar jovens potencialmente mais criativos e promover oportunidades para o desenvolvimento dessa capacidade (Jeffrey & Craft, 2004).

Mesmo não sendo linear, existe, naturalmente, uma ligação estreita entre as duas práticas: a interação entre o ensino criativo e eficaz e a aprendizagem criativa cria um clima favorável para o desenvolvimento da criatividade (Lin, 2011). Por outras palavras, o ensino criativo e o ensino para a criatividade não são fenómenos disjuntos. Ensinar para a criatividade implica um ensino criativo (Jeffrey & Craft, 2004).

Abordagens inovadoras, imaginativas e dinâmicas estimulam a imaginação dos alunos e o aparecimento de novas ideias (Jeffrey & Craft, 2004). Ao ensinar de forma criativa, os professores estimulam a criatividade dos alunos quando revelam o seu entusiasmo, a sua imaginação e outros talentos (Lucas, 2001, referido por Lin, 2011). Neste processo, ocorre a criação de um ambiente de aprendizagem propício à resolução de problemas e que valoriza as contribuições dos alunos criativos.

Assim, os professores devem ser, designadamente, fluentes na gestão da aula, flexíveis com o plano e originais na criação de tarefas que sejam capazes de estimular o raciocínio matemático dos alunos e tornar as aulas mais agradáveis e interessantes (Zamir & Leikin, 2011).

Ponte (2005, p.1) sugere a criação de tarefas que envolvam os alunos em "atividades matematicamente ricas e produtivas". O autor classifica a natureza destas tarefas a desenvolver pelos alunos quanto ao seu grau de abertura e complexidade, em contextos reais ou puramente académicos, promotoras do desenvolvimento de técnicas e/ou de conceitos, serem de carácter individual ou de grupo e socorrer-se da manipulação de materiais, tecnológicas ou de papel e lápis.

O autor define duas dimensões fundamentais das tarefas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. A primeira está intimamente relacionada com a perceção da dificuldade de uma tarefa variando entre desafio “reduzido” e “elevado”. A segunda dimensão traduz o grau de indeterminação no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas.

Ainda de acordo com o autor, é necessário considerar também a duração e o contexto das tarefas. Relativamente à primeira, estas podem ser de curta ou longa duração, sendo um projeto um exemplo de uma tarefa de longa duração. Sobre o contexto, o autor refere uma dicotomia entre tarefas enquadradas num contexto de realidade e tarefas formuladas em termos puramente matemáticos. Ainda de acordo com o autor (2005), as linhas que separam estas tarefas são, por vezes, bastante difusas. Uma proposta em particular pode corresponder a uma exploração para um grupo de alunos ou a um exercício para outro, dependendo apenas dos seus conhecimentos prévios e, portanto, da abordagem formal do conteúdo que permite responder à questão. Se a tarefa em questão se configurar como uma exploração para os alunos, estes necessitarão de mobilizar os seus conhecimentos intuitivos.

O esquema que se segue que sintetiza essas relações (figura 1).

Fig. 1 - Natureza das tarefas quanto ao seu grau de abertura e complexidade, (adaptado de Ponte 2005)

Vale et al. (2012) estabelecem que os professores devem interpretar o currículo, selecionando bons materiais e estratégias curriculares. Defendem ainda que os alunos precisam de ser incentivados a procurar respostas incomuns e originais e que esta estratégia permite obter soluções para problemas desafiantes ou encontrar um caminho para soluções criativas. Os professores devem ser, também, matematicamente competentes para analisar as resoluções dos problemas que eles mesmos propõem (idem).

Partindo do pressuposto que a aprendizagem dos alunos é grandemente influenciada pelas tarefas que lhes são propostas (Doyle, 1988; Stein & Smith, 2009, referidos por Vale et al. 2012) é, então, importante dispor de um conjunto de boas tarefas matemáticas que desenvolvam novas ideias e promovam abordagens criativas, permitindo múltiplas soluções, a fim de aumentar o fluxo de ideias matemáticas dos alunos, flexibilidade do pensamento e originalidade das respostas. As tarefas devem ser desafiantes: resolução e formulação de problemas, explorações matemáticas e investigações (Vale, 2011).

Esta autora refere também que o confronto dos alunos com diversas resoluções, especialmente com as dos próprios colegas, facilita o desenvolvimento da fluência e da flexibilidade. Acrescenta, ainda, que a temática da criatividade surge agora como um desafio e proporciona uma oportunidade de mudança para ensinar e aprender Matemática (Vale, s/d).

Fleith e Alencar (2005) destacam ainda alguns fatores referidos por Sternberg (2003) como estimuladores da criatividade:

- encorajar o aluno a arriscar e aceitar o erro como parte do processo de aprendizagem;
- permitir que o aluno imagine outros pontos de vista e, consequentemente, gere múltiplas hipóteses e formule problemas;
- recompensar ideias e produtos criativos.

Sheffield (2009) considera que desenvolver a criatividade Matemática carece que os alunos possuam um conhecimento dos conteúdos matemáticos que lhes permita estabelecer mais facilmente conexões entre diferentes conceitos, portanto, um conhecimento matemático sólido.

1.4. Avaliação da Criatividade em Matemática

Termos como espontaneidade, pensamento divergente, questões abertas, múltiplas soluções, imaginação e capacidade inventiva são alguns dos elementos que se relacionam com a avaliação da criatividade.

Assim, avaliar criatividade afigura-se, um exercício delicado. Morais (2011) interrogava-se sobre a forma de avaliar um conceito ainda alvo de intensa problematização, marcadamente singular e pessoal, transversal e permeável ao contexto. Também segundo Azevedo, Morais e Braga (2008), avaliar a criatividade em contexto escolar é uma necessidade que levanta questões que não encontrarão uma resposta consensual.

Na tentativa de se avaliar criatividade, Isaken et al. (1994), referidos por Morais, (2001) determinam a existência de duas centenas e meia de instrumentos.

Hocevar e Bachelor (1989) classificam os instrumentos de avaliação da criatividade, fundamentalmente, em oito categorias: testes de pensamento divergente, inventários de atitudes e interesses, inventários de personalidade, inventários biográficos, avaliações dos professores, pares e supervisores, autoavaliações de realizações criativas, estudos de indivíduos eminentes e avaliação dos produtos criativos.

Os iniciais testes de pensamento divergente, que o próprio Torrance (1974) reconhece não serem capazes de medir a essência da criatividade, são gradualmente substituídos pelos inventários de personalidade, de atitudes e interesses, pela análise de produtos criativos ou pela investigação dos aspectos socioculturais potenciadores ou inibidores da criatividade.

Veja-se um instrumento para avaliação da criatividade em Matemática, proposto por Balka (1974), referido por Gontijo (2007), que é um inventário de habilidades:

- Habilidade para formular hipóteses matemáticas avaliando relações de causa e efeito em situações matemáticas;
- Habilidade para considerar e avaliar ideias matemáticas não usuais, refletindo sobre suas consequências em situações matemáticas;
- Habilidade para perceber problemas a partir de uma situação matemática e formular questões que possam responder a esses problemas;
- Habilidade para elaborar subproblemas específicos a partir de um problema matemático geral;

- Habilidade para buscar soluções para problemas matemáticos, rompendo com um quadro mental “estático”;
- Habilidade de elaborar modelos para solucionar situações matemáticas (p.75).

De acordo com vários autores (Torrance, 1974; Silver, 1997; Conway, 1999; Leikin, 2009a), o nível de criatividade de um indivíduo pode ser aferido a partir da medição de quatro capacidades mentais envolvidas no processo criativo: a fluência, a flexibilidade, a originalidade e a elaboração. Relativamente à fluência, que, recorde-se, está relacionada com a capacidade de produzir um grande número de ideias diferentes, pode ser medida através do número de soluções obtidas pelo aluno para uma determinada tarefa. Estando a flexibilidade associada à capacidade para pensar de modos diferentes, à mudança de ideias durante a resolução de um problema no sentido de se procurarem diversas soluções ou a solução óptima, esta capacidade pode ser medida pelo número de abordagens diferentes que o aluno ensaia. No que respeita à originalidade, que é, como já foi visto anteriormente, a capacidade de pensar de forma única, produzindo ideias novas e se manifesta quando um aluno analisa várias resoluções para um problema, métodos e respostas e consegue criar outro que seja diferente, pode ser medida por comparação com o número de alunos no grupo que poderia produzir essa mesma solução. A elaboração, que se encontra relacionada com a capacidade de descrever, acrescentar detalhes a uma descoberta já produzida e generalizar ideias, reflete-se no nível da discussão matemática.

Leikin (2009a) especificou um modelo para avaliar a criatividade em Matemática recorrendo a tarefas com múltiplas soluções (multiple solution tasks), nas quais se solicita aos alunos diferentes resoluções para um determinado problema matemático. A autora considera como diferentes as soluções se forem baseadas em:

a) diferentes representações de alguns conceitos matemáticos envolvidos na tarefa;
b) diferentes propriedades (definições ou teoremas) de objetos matemáticos num determinado âmbito;
c) diferentes propriedades de um objeto em diferentes âmbitos.

O modelo estabelecia a atribuição de pontuações às resoluções dos alunos observando originalidade, flexibilidade e fluência das respostas. Relativamente à originalidade, a pontuação variava em função das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos. A pontuação a atribuir era inferior se estas estivessem indicadas no currículo, nos manuais ou tivessem sido referidas pelo professor. A pontuação a atribuir à fluência variava em função do tempo gasto pelos alunos na produção das diferentes soluções e a flexibilidade era avaliada a partir do número de diferentes categorias de soluções apresentadas.

2. Acerca da Geometria

"There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of the spheres."
Pythagoras

Aprender Matemática é um direito dos cidadãos, principalmente nos países mais industrializados. Enquanto disciplina, ocupa um papel central no currículo e nas sociedades. O seu ensino tem sido objeto de estudos, publicações e encontros e sobre ele se tecem inúmeras opiniões, demasiadas vezes de cariz marcadamente ideológico. A atenção sobre esta área estende-se a diversos países como provam os estudos nacionais e internacionais (TIMSS, 1995, 2011; PISA, 2006, 2009; GAVE, 2007, 2010) que visam aferir o nível de proficiência dos seus estudantes nesta disciplina que ocupa um lugar central no currículo de inúmeros países como reconhecimento da extraordinária importância desta ciência para o desenvolvimento dos povos. Em Portugal, comparativamente com outras disciplinas, apresenta uma maior carga horária e os alunos são alvo de exames nacionais no final de cada ciclo de escolaridade.

Dentro da Matemática, a Geometria tem vindo a ganhar uma importância acrescida. Segundo o NCTM (2000):

> "In recent years, the possibility and necessity of students' gaining facility in algebraic thinking have been widely recognized. Accordingly, these Standards propose a significant amount of algebra for the middle grades. In addition, there is a need for increased attention to geometry in these grades. Facility in geometric thinking is essential to success in the later study of mathematics and also in many situations that arise outside the mathematics classroom. Moreover, geometry is typically the area in which U.S. students perform most poorly on domestic and international assessments of mathematics proficiency. Therefore, significantly more geometry is recommended in these Standards for the middle grades than has been the norm." (pp.211-212).

Guzmán (2003) admite que o estudo da Geometria é importante porque estimula a capacidade do ser humano para explorar racionalmente o espaço físico em que habita, a figura e a forma física. Referindo-se a Freudenthal (1973), Ponte (2000) sugere também que a Geometria oferece uma excelente oportunidade para relacionar a Matemática com o mundo real constituindo-se como um tema unificador na aprendizagem da Matemática, designadamente porque fornece formas de representação visualmente muito apelativas. Referindo o mesmo autor, Matos (2001), reitera a importância da inclusão da Geometria nos planos de estudo porque advoga, também, uma íntima ligação à realidade no ensino e na aprendizagem da Matemática. Assim, considera que a Geometria se presta à aprendizagem da 'matematização' da realidade.

Breda et al. (2011) referem que "A Geometria contribui com um vocabulário geométrico que se vai adquirindo, mas, a par disso, espera-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade de compreensão dos conceitos e suas relações, da análise da informação, de resolução de problemas, de comunicação, mas também de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações." (p.15).

2.1. Sobre o Ensino e a Aprendizagem da Geometria

Battista (2007) define Geometria como uma rede complexa de conexões de conceitos, formas de raciocinar e sistemas de representação, que é utilizada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários.

Se Piaget e Inhelder (2004) se referem à Geometria como ciência do espaço, os van Hiele combinam esta perspetiva com um entendimento da Geometria enquanto meio de demonstração da estrutura matemática (Hershkowitz, 1990). Segundo as investigações de Pierre e Dina van Hiele (Van Hiele, 1999), a progressão dos alunos realiza-se através de níveis sequenciais e hierárquicos de pensamento em geometria e ocorre através do ensino. Os autores, e outros que se seguiram, definiram um conjunto de níveis de aprendizagem (Breda et al., 2011):

- Nível 0 - Pré-reconhecimento – os alunos neste nível dão atenção apenas a parte das características visuais de uma figura, sendo incapazes de identificar muitas figuras comuns;
- Nível 1 – Visual - os alunos identificam, descrevem e raciocinam acerca das figuras e outras configurações geométricas de acordo com a sua aparência como um todo visual;

- Nível 2 – Descritivo/Analítico – os alunos reconhecem e caracterizam figuras pelas suas propriedades geométricas, isto é, explicitamente focando e descrevendo relações entre as partes de uma figura;
- Nível 3 – Ordenação - neste nível os alunos compreendem as relações entre as propriedades.

(adaptado de Breda et al., 2011)

Os van Hiele estabeleceram mais dois níveis, considerados como superiores, alcançáveis apenas por alunos de idade e nível de ensino mais elevados: Dedução, onde a geometria é entendida como um sistema axiomático e Rigor, onde a geometria é entendida ao nível de um matemático capaz de comparar diferentes sistemas e onde o entendimento da Geometria não euclidiana é possível.

Apesar de se constituir como um referente no ensino e na aprendizagem da Geometria, diferentes autores assinalam algumas limitações a esta teoria. Matos (1999) declara que não contempla especificamente áreas como a orientação espacial e representação, a medida, a trigonometria, ou a geometria analítica, Battista (2007) assinala a natureza "discreta dos níveis" como impeditiva da ponderação das diferenças individuais e a sua circunscrição às figuras no plano. Assim, alguns estudos têm tentado adaptar os níveis de van Hiele alargando-os às figuras tridimensionais e às transformações geométricas (Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991). Outros têm procurado compreender os modelos cognitivos para o conceito de ângulo (Matos, 1999).

Clements e Sarama (2000) referem que o ensino e a aprendizagem da geometria deve começar cedo, considerando surpreendente os exíguos conhecimentos sobre as formas que as crianças do pré-escolar e os alunos até ao ensino secundário apresentam.

Segundo Matos (1999), o ensino da Geometria inicia-se conferindo aos alunos a liberdade para organizarem fenómenos espaciais e manipularem esses meios de organização e não por familiarizar as crianças com estruturas matemáticas desenquadradas do seu quotidiano. Ainda segundo este autor, a maioria dos alunos só poderá atingir os tópicos geométricos superiores se forem construídos sobre esta organização inicial.

O papel central que as aprendizagens na educação básica assumem no desenvolvimento do pensamento geométrico, recorrendo a actividades que envolvam a visualização e representação, medição, transformações geométricas e organização do pensamento geométrico, é salientado, também, por Abrantes et al. (1999).

A propósito, Battista (2007) considera que grande parte do pensamento geométrico está alicerçado no raciocínio espacial - capacidade de observar, interpretar e reflectir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. E alguns autores (e.g., Hershkowitz, Parzysz & Dormolen, 1996) enumeram algumas razões para a importância do seu desenvolvimento a partir do Pré-escolar: (i) a compreensão do mundo visual que nos rodeia, (ii) a compreensão dos conceitos, processos e fenómenos em diferentes áreas da Matemática e ciência, e (iii) a perceção da mutabilidade dos objetos.

Investigações no campo dos mecanismos de raciocínio das crianças relativamente à classificação de figuras (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998) estabeleceram que os melhores resultados eram alcançados por crianças que se apercebiam das relações entre as figuras a partir de transformações dinâmicas (transformação de uma figura noutra). A distinção, por parte dos alunos, de figuras a partir da forma e da verificação da "lista" de características elencadas por professores menos sensibilizados cerceia a capacidade de resolver problemas geométricos abstratos que requeiram raciocínio cognitivo lógico (Leung, 2008), pelo que, como refere Parzysz (1988), é necessário estudar as características comuns a todos os elementos de uma classe de figuras (propriedades das figuras) e não apenas a sua representação. Neste contexto, alguns estudos têm sido realizados sobre classificação de figuras, onde se identificam concetualizações erradas das crianças baseadas nos protótipos que possuem, que ignoram as propriedades das figuras (Battista, 2007; Sarama & Clements, 2009).

Relativamente às propriedades de figuras geométricas observam-se, nos alunos, diferentes conceções sobre o mesmo ente. Clements et al. (1996) referem, por exemplo, que é frequente não considerarem os ângulos como uma propriedade decisiva das figuras geométricas. Dada a sua natureza complexa, Mitchelmore (1992) refere a importância de se relacionar as representações estáticas com modelos dinâmicos de ângulo. Sobre este assunto, Matos (1999) sugere que o ângulo agudo e o ângulo reto constituem a imagem mental de ângulo dos alunos e a sua posição prototípica caracteriza-se pela verticalidade de um lado e a horizontalidade do outro.

O conceito de semelhança é considerado como dos mais difíceis de ensinar e aprender em geometria (Zaslavsky, 1991). Segundo Hershkowitz, (1990) exige raciocínio proporcional, essencial na compreensão do desenho e dos modelos à escala. Nesta linha de pensamento, Abrantes et al. (1999) preconizam que as experiências iniciais com transformações geométricas não se limitem à observação de figuras simétricas e congruentes, mas também semelhantes.

O conceito de congruência, segundo Clements (2003), começa a ser desenvolvido desde cedo. Numa fase mais precoce, as crianças identificam figuras congruentes por sobreposição. Mais tarde, referem-se às propriedades das figuras e às transformações geométricas nas suas justificações.

Neste sentido, Del Grande (1990) estipula que a capacidade de perceção da posição no espaço poderá ser desenvolvida através da identificação de figuras congruentes que tenham sofrido transformações geométricas de translação, rotação e reflexão, assim como de suas composições.

Sobre o conceito de medida em geometria, um grande número de professores encara-o como um conjunto de tarefas numéricas baseadas em cálculos. Iludem, assim, o trabalho com as estruturas espaciais não prestando especial atenção à região que determinada figura ocupa (Tierney, Boyd & Davis, 1990). Como sugere também Battista (2007), as dificuldades apresentadas pelos alunos nesta área parecem estar relacionadas com uma introdução prematura de fórmulas que conduzem a um raciocínio de caráter superficial, em detrimento de uma verdadeira compreensão do conceito (Battista, 2007).

Alguns estudos, que se centraram sobre a determinação da área a partir de composições de figuras (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998; Battista, 2007), revelaram resultados preocupantes. Constatou-se, por exemplo, que apenas um número limitado de crianças raciocina com base na composição aditiva da área, sendo ainda mais reduzido se o termo "área" aparecia mencionado nos guiões das tarefas (Outhred & Mitchelmore, 1996).

Um ensino adequado, com recurso a materiais não convencionais de medida, pode, segundo Clements et al. (2001) fazer evoluir os alunos na composição e decomposição de figuras.

2.1.1. Notas Sobre a Abordagem Didática das Isometrias

No ensino da Geometria, as transformações geométricas desempenham um papel de especial importância. Para além da relevância que elas têm na história da Matemática, "constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço." (Bastos, 2007, p.23).

Abrantes et al. (1999) sustentam que as experiências com transformações geométricas podem iniciar-se com a observação de figuras com simetria, congruentes ou semelhantes.

Breda et al. (2011), na sua brochura de apoio ao PMEB, sugerem também que:

> "[...] a informalidade deve ser um aspecto essencial nas primeiras experiências em geometria. Desde o nascimento, as crianças tiveram muitas experiências geométricas e adquiriram ideias geométricas que devem ser exploradas e validadas. Para isso, é necessária uma variedade de experiências de investigação e discussão de conceitos geométricos em diferentes contextos." (p.17).

Recomendam ainda a utilização de diversos recursos tais como, a régua, o esquadro, o compasso e transferidor e outros materiais manipuláveis. Ainda referem a necessidade de incorporar a tecnologia na sala de aula de Geometria:

> "A tecnologia pode assim constituir um contexto para discussões entre os alunos e o professor sobre os objectos visualizados no ecrã e os efeitos das diversas transformações proporcionadas pelo software, o que para além do desenvolvimento dos conceitos em presença, contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática." (idem, p.22).

Neste contexto, diversos autores defendem também a importância da utilização dos computadores e, especialmente, de programas de geometria dinâmica (Junqueira, 1995; Coelho, 1996; Ribeiro, 1996; Veloso, 1998; Candeias, 2005; Gorgulho, 2005; Ponte et al., 2007; NCTM, 2008; Cabrita et al., 2009; Breda et al., 2011) considerando que o uso deste software contribui para ampliar as representações dos alunos quando, por exemplo, deslizam, rodam, ampliam ou reduzem uma figura.

Tarefas relacionadas com transformações geométricas são propostas desde o Pré-escolar. No entanto, podem surgir, nos alunos, dificuldades relacionadas com o tipo de transformação ou sua a orientação. Apesar da escassa representação na literatura de aspectos relacionados com a investigação do ensino e da aprendizagem das transformações geométricas, alguns estudos referem-se à sua compreensão pelos alunos, particularmente sobre a reflexão e rotação (Gomes, 2012). Alguma investigação concluiu que estas dificuldades são menores em tarefas que envolvam a rotação relativamente às que envolvam reflexão (Jacobson & Lehrer, 2000). Outros trabalhos anteriores concluíram, ainda, que o desempenho dos alunos foi superior em tarefas que envolvam translação relativamente às que envolvam rotação (Clements et al., 1996). No entanto, alguns estudos sobre as perceções de crianças com idades inferiores a 10 anos (e.g., Shah, 1969; Moyer, 1978) mostraram que estas consideravam que as translações, especialmente as horizontais, eram tão ou mais fáceis do que as reflexões e que, estas últimas, eram mais fáceis do que as rotações.

Kucheman (1981), num estudo com alunos com idades compreendidas entre os 11 e os 16 anos, verificou que a inclinação do eixo de reflexão constitui-se como uma dificuldade - alunos apresentavam um desempenho superior quando o eixo era vertical ou horizontal. Também Schultz e Austin (1983) concluíram que os alunos parecem apresentar maiores dificuldades quando a reflexão tem subjacente um eixo oblíquo.

A complexidade dos objetos parece, também, influenciar os resultados - a maior simplicidade do objeto corresponde um desempenho mais elevado. Relativamente à rotação, os resultados sugerem que os alunos consideraram mais complexo efectuar rotações em que o centro estivesse fora da figura (Kucheman, 1981).

2.1.2. Notas Sobre a Abordagem Didática da Simetria

Relativamente ao ensino e à aprendizagem da simetria, as crianças possuem, desde os primeiros anos, noções de simetria (Clements, 2003; Sarama & Clements, 2009) pelo que a abordagem deste conceito deve partir das suas experiências prévias. De acordo com Schattschneider (2009), os alunos começam por aprender a reconhecer a simetria através da observação de várias figuras, explorando-as com espelhos, dobrando-as, rodando-as e sobrepondo-as. No entanto, existem algumas variáveis que interferem com a habilidade de percecionar a simetria de figuras e que devem ser alvo de atenção na abordagem deste conceito no ensino básico (Hershkowitz, 1990): a orientação do eixo de simetria, a posição respectiva das diferentes partes da figura geométrica e do eixo (fenómeno dos protótipos), e a idade dos estudantes. Genkins (1975), referido por Clements (2003), considera que a simetria bilateral vertical é de mais fácil compreensão por parte dos alunos do que uma simetria de eixo horizontal. Diversos estudos relacionados com a simetria revelam dificuldades dos alunos na sua conceptualização e Genkins (1975), referido por Clements (2003), defende mesmo que esta não ocorre de forma sólida antes dos 12 anos de idade.

O NCTM (2008) aponta, ainda, algumas orientações metodológicas para a identificação, descrição e comprovação de características de simetria de figuras. Como exemplo, sugere a composição de figuras com simetria de rotação e reflexão utilizando peças poligonais, espelhos, miras, recortes e dobragens em papel para investigar a existência de eixos de simetria. Sugere, também, a exploração de figuras com mais de um eixo de simetria relacionando-a com as propriedades de figuras bidimensionais e respetiva classificação.

2.2. Geometria e o Currículo

Considerada, em Portugal, como um parente pobre da Álgebra Linear devido ao pouco interesse para a prossecução de estudos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 67), a escola não tem dado a devida relevância a esta área (Abrantes, 2005; Cabrita et al., 2008, 2009; NCTM, 2008) e, tal como referem Breda et al. (2011), a Geometria tem sido normalmente relegada para segundo plano e “tratada a partir de definições, dando pouco espaço à ação dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos” (p.87). Sobre este aspecto, Veloso (1999) refere a existência de uma tradição negativa no ensino da Geometria em Portugal ao longo dos anos, caracterizada por uma importância excessiva conferida ao papel das definições prévias sem ligação à experimentação e pela sua marginalização no currículo, assumida como independente e desligada dos restantes conteúdos.

Clements (2003), quando constata a tendência para centrar o ensino da geometria simplesmente no reconhecimento e nomeação de formas geométricas e na utilização de fórmulas em medições geométricas (Porter, 1989; Clements & Battista, 1992), manifesta profunda preocupação pela realidade da maioria dos currículos e de práticas pedagógicas. Ao descrever uma amostra de currículos alternativos (ambientes educativos desenvolvidos por Lehrer, Jacobson, and collegues; o currículo da Holanda; a reforma curricular pelo University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP); o programa Jasper e o currículo Investigations in Number, Data and Space), refere a necessidade de se pensar em currículos alternativos para o ensino da geometria, baseados nos princípios e normas para a Matemática escolar propostos pelo NCTM.

A publicação, em 1989, das Normas para o Currículo deste movimento, constituiu um marco importante no regresso da Geometria como tema proeminente da Matemática escolar (Veloso 1998, p.28). As suas recomendações desencadearam uma mudança significativa e a evolução da Geometria para um papel mais central no currículo tem vindo a acentuar-se, como demonstram, entre outras propostas e iniciativas, a publicação de livros, materiais e software para o seu ensino.

Nesse seguimento, em Portugal, o papel da Geometria começou a ser repensado. Aconteceu, em 1988 a renovação do Currículo de Matemática (Associação de Professores de Matemática [APM], 2009) com princípios e orientações curriculares para a resolução destes problemas.

Os autores, reconhecendo a necessidade da selecção dos conteúdos matemáticos a introduzir nos currículos escolares e a reavaliação das propostas de exploração e desenvolvimento desses conteúdos, referem a Geometria como um dos campos onde seria fundamental uma reorientação do ensino para os processos e uma atualização de conteúdos. A partir destas novas orientações, foi elaborado um novo Programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Básico (publicado em 1990, pelo Ministério da Educação), focado na natureza do tipo de atividades a desenvolver (problemas, situações de exploração e descoberta, e situações de aplicação) interligando todos os blocos de conteúdos. No bloco Forma e Espaço, que pretendia ser uma iniciação à geometria, os conteúdos essenciais relacionavam-se com (i) a organização espacial, (ii) sólidos geométricos, (iii) figuras geométricas planas, (iv) transformações no plano (entendidas apenas como composição e decomposição de figuras) e (v) utilização de instrumentos de desenho. Pretendia-se que os alunos, no final do 1.º Ciclo, fossem capazes de:

- Situar-se no espaço em relação aos outros e aos objetos;
- Comparar objetos segundo algumas das suas propriedades;
- Reconhecer, nomear e comparar figuras planas;
- Reconhecer elementos e propriedades de figuras planas;
- Reconhecer figuras geométricas em diversas posições;
- Fazer composições com figuras geométricas planas;
- Reconhecer, a partir da observação de sólidos, retas paralelas e retas perpendiculares;
- Explorar simetrias;
- Comparar e identificar os seguintes sólidos geométricos: cubo, esfera, cilindro, paralelepípedo, cone e pirâmide;
- Construir um cubo a partir de uma dada planificação;
- Reconhecer ângulos em figuras geométricas planas e nos objetos;
- Comparar a amplitude de ângulos e reconhecer: ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso;
- Fazer transformações de figuras geométricas planas segundo algumas regras (utilizando diferentes meios e materiais: dobragens, geoplano…);
- Desenhar frisos e rosáceas;
- Fazer uma composição a partir de um dado padrão;
- …

(adaptado de Ministério da Educação [ME], 2004, pp.180-184)

Relativamente à reorganização curricular dos programas do Ensino Básico do 2.º ciclo (ME, 1991a; 1991b) e do 3.º Ciclo (ME, 1991c; 1991d), estes refletem as orientações da época, recentrando a Geometria no currículo. Nas recomendações curriculares do programa do 2.º Ciclo, é referido que o estudo da Geometria deve partir de propostas de trabalho que permitam "manipular, comparar, descobrir, construir, traçar, passando do espaço ao plano e do plano ao espaço" (ME, 1991a, p. 155), onde o aluno tenha oportunidade de ensaiar, errar e corrigir os seus erros e de desenvolver a comunicação oral e/ou verbal dos seus raciocínios, analisando-os, explicando-os e discutindo-os. O documento defende, também, que "[...] situações do âmbito da Geometria possam servir de suporte a actividades numéricas" (ME, 1991c, p.13), numa lógica de estabelecimento de conexões.

Para o 3.º Ciclo, o programa refere que o estudo da Geometria deve basear-se em propostas de trabalho que impliquem "medições, construções, comparação e transformação de figuras, identificação dos seus elementos, reconhecimento de propriedades, resolução de puzzles geométricos, etc." (ME, 1991b, pp.179-180). Destaca-se, também, a importância da observação e intuição no desenvolvimento gradual de raciocínios indutivos e dedutivos, da realização de experiências, da resolução de problemas por construção; da justificação de processos, raciocínios, conjeturas e conclusões. O desenvolvimento do conhecimento do espaço a partir da análise de figuras mantém-se também como tema central (ME, 1991d).

O movimento de revalorização da Geometria continuou ao longo das décadas seguintes. Surgiram, assim, outros documentos: o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME, 2001), o Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007).

No Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME-DEB, 2001) definiram-se os vários aspectos da competência matemática a serem desenvolvidos ao longo do ensino básico. De acordo com este documento, no domínio da Geometria, os estudantes deveriam desenvolver:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;
- a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em Geometria e em outras áreas da Matemática;

- a compreensão dos conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;
- a aptidão para efetuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a aptidão para formular argumentos válidas recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a sensibilidade para apreciar a Geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação" (p.62).

A nível internacional, o Principles and Standards for School Mathematics, publicado pelo NCTM em 2000 (e pela APM em 2008 com o título Princípios e Normas para a Matemática Escolar), define orientações para a educação matemática do Pré-escolar ao 12.º ano. No âmbito da Geometria, os alunos devem ser capazes de:

- analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- especificar posições e descrever relações espaciais;
- aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

(adaptado de NCTM, 2008, p.44)

Para além destas orientações, são definidas expetativas para os estudantes dos vários níveis de ensino, do pré-escolar ao 2.º Ciclo. Assim, espera-se que estes:

- reconheçam, designem, comparem e classifiquem figuras bi e tridimensionais;
- descrevam e classifiquem formas bi e tridimensionais através das suas propriedades e partes componentes;

- investiguem e prevejam os resultados obtidos pela composição e decomposição de várias figuras bi e tridimensionais;
- explorem a congruência e a semelhança;
- descrevam a posição e o movimento através da linguagem corrente e vocabulário geométrico;
- prevejam e descrevam os resultados obtidos por translação, reflexão e rotação de figuras bidimensionais;
- descrevam os movimentos que mostrem a congruência de duas figuras;
- identifiquem e descrevam a simetria linear e rotacional em formas e figuras bi e tridimensionais;
- criem imagens mentais das figuras geométricas, usando a visualização espacial;
- identifiquem e construam um objeto tridimensional a partir de representações bidimensionais desse objeto;
- identifiquem e desenhem representações bidimensionais de um objeto tridimensional;
- …

(adaptado de NCTM, 2008, pp.112,190)

Num sentido convergente com aquilo que tem vindo acontecer internacionalmente, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte et al., 2007), reconhecendo a importância da Geometria, dedica-lhe um lugar central no currículo. Surge como propósito principal de ensino para os três ciclos do ensino básico "Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão de grandezas geométricas e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos" (Ponte et al., 2007, p.36).

As alterações mais significativas dizem respeito à introdução das transformações geométricas logo no 1.º Ciclo e a conexão com a Medida, constituindo um único tema: Geometria e Medida. Os autores definiram, assim, como objetivos gerais de aprendizagem pare este ciclo de ensino (Ponte et al., 2007, p.20):

- desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam;

- ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais;
- compreender as grandezas dinheiro, comprimento, área, massa, capacidade, volume e tempo;
- compreender o que é a unidade de medida e o processo de medir;
- ser capazes de realizar estimativas e medições e de relacionar diferentes unidades de medida;
- ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.

Ainda relativamente aos objetivos propostos gerais de aprendizagem para o 2.º Ciclo, o documento refere que os alunos devem (Ponte et al., 2007, p.36):

- compreender e ser capazes de usar propriedades dos números inteiros e racionais;
- compreender e ser capazes de operar com números racionais e de usar as propriedades das operações no cálculo;
- ser capazes de apreciar a ordem de grandeza de números e compreender os efeitos das operações sobre os números;
- desenvolver a capacidade de estimação, de cálculo aproximado e de avaliação da razoabilidade de um resultado;
- desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;
- ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.

Observa-se, também, um especial enfoque no conceito de simetria. Estes aspectos constituem uma mudança de relevo face aos documentos anteriores (Veloso, 2012).

Este documento sugere, ainda, nas suas indicações metodológicas para o tema Geometria para o 2.º Ciclo - "O estudo da Geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas. As tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial neste ciclo, sobretudo as que dizem respeito a reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão" (p.36). E acrescenta - "No estudo deste tema, é fundamental o recurso a instrumentos de medida e de desenho […]" (p.37) e "Os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os applets favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados" (ibidem).

Ao nível do 3.º Ciclo, o PMEB realça a "inter-relação plano-espaço, aprofunda-se o estudo de alguns sólidos geométricos e de figuras no plano", partindo do que já foi realizado no 2.º Ciclo (Ponte et al., 2007, p.51). Numa linha de continuidade do 1.º Ciclo, este domínio temático tem como propósito central o desenvolvimento do sentido espacial, com especial enfoque na "visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas" (ibidem), quer no plano quer no espaço, "a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração" (ibidem), numa lógica de resolução de problemas em contextos diversos. Ao nível das indicações metodológicas, refere-se que, quer na resolução de problemas como nas tarefas exploratórias e de investigação, é importante que os alunos tenham oportunidade para realizar experiências, com um tempo apropriado, elaborar estratégias, formular conjeturas, descrever processos e os justificar com rigor progressivo (ibidem). Os Objetivos Gerais de Aprendizagem indicados no PMEB (Ponte et al., 2007) para a Geometria são:

- "desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- compreender e ser capazes de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos;
- desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças;
- compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos;
- ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos" (p.51).

Mais recentemente, o projecto "Metas de Aprendizagem" inserido na Estratégia Global de Desenvolvimento do Currículo Nacional delineada pelo Ministério da Educação em Dezembro de 2009, justificado pela necessidade de reorganizar e clarificar a globalidade das prescrições e orientações curriculares, visa conceber "referentes de gestão curricular para cada disciplina ou área disciplinar, em cada ciclo de ensino, desenvolvidos na sua sequência por anos de escolaridade, incluindo ainda metas finais para a Educação Pré-escolar" (ME-DGIDC, 2009).

Com a possibilidade da serem efetuados ajustamentos pelas escolas, pretendem traduzir-se na " identificação das competências e desempenhos esperados dos alunos, no entendimento que tais competências e desempenhos evidenciam a efectiva concretização das aprendizagens em cada área ou disciplina e também as aprendizagens transversais preconizadas nos documentos curriculares de referência [...]" (idem) e constituir-se como um instrumento de apoio à gestão do currículo de utilização voluntária e livre pelos professores. Não sendo um documento normativo, refere-se que se o seu uso "efectivo decorra do reconhecimento da sua utilidade prática por parte dos professores, dos alunos e das famílias." Estabelece-se, também, que o documento visa "promover um percurso de coerência, clarificação e operacionalidade dos documentos curriculares que orientam, no plano nacional, as linhas de acção que as escolas e os professores devem desenvolver no quadro da sua autonomia e face às diversidades dos seus contextos específicos. Visa nomeadamente operacionalizar, em termos de resultados de aprendizagem esperados, as competências que devem resultar, para cada ciclo e área ou disciplina, do conhecimento sólido dos respectivos conteúdos, conceitos estruturantes e processos de uso e construção desses conhecimentos" (ibidem).

Relativamente à disciplina de Matemática, é estabelecido que as Metas de Aprendizagem se baseiam no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) e que se apresentam organizadas, a partir dos quatro temas matemáticos, em metas finais e intermédias. Estabelece-se, também, nos seus parágrafos introdutórios, que a sua construção obedeceu às seguintes orientações gerais:

- partir do propósito principal de ensino, clarificar e operacionalizar os objetivos gerais e específicos do PMEB considerados fulcrais, usando exemplos ilustrativos quando entendidos como recurso necessário à sua compreensão;
- seguir de perto a formulação original dos objetivos do PMEB, de modo a evitar interpretações erróneas, nomeadamente, a de que existem novos resultados de aprendizagem esperados, para além dos que são visados pelo PMEB;
- articular, sempre que possível, as capacidades transversais com os tópicos matemáticos, embora sem carácter exaustivo;
- definir metas de final de ciclo e, a partir delas, as metas para cada um dos anos de escolaridade. No 1.º Ciclo foram definidas duas etapas: 1.º- 2.º anos e 3.º- 4.º anos.

Refere-se, também, no documento que as metas de aprendizagem não são um substituto do programa nem da sua planificação e que, por esse motivo, a ordem com que surgem não representa a ordem com que os tópicos matemáticos correspondentes devem ser tratados no ensino. Observe-se, ainda, as metas de aprendizagem surgem também ao nível das competências transversais a desenvolver: Resolução de Problemas, Raciocínio Matemático e Comunicação

Matemática. Relativamente à Geometria, e para o 2.º Ciclo do Ensino Básico, que é o alvo deste estudo, enumeram-se as seguintes metas finais:

- Meta Final 18: Identifica e utiliza as propriedades dos sólidos geométricos.
- Meta Final 19: Compreende grandezas geométricas e respectivos processos de medida.
- Meta Final 20: Usa a visualização e o raciocínio geométrico na resolução de problemas em contextos diversos.
- Meta Final 21: Identifica e utiliza as propriedades das figuras geométricas no plano.
- Meta Final 22: Relaciona vários tipos de ângulos.
- Meta Final 23: Resolve problemas utilizando as propriedades das figuras geométricas no plano.
- Meta Final 24: Compreende as noções e propriedades da reflexão, translação e rotação.
- Meta Final 25: Usa a visualização e o raciocínio geométrico na identificação de isometrias.

2.3. Transformações Geométricas Isométricas

O NCTM (2008) preconiza que os alunos devem aprofundar, ao longo dos anos de escolaridade obrigatória, conhecimentos sobre transformações geométricas, explorando alguns dos "movimentos" que se associam às translações, reflexões, reflexões deslizantes e rotações, tornando-os gradualmente mais formais e sistematizados. As transformações revelam-se igualmente úteis para ajudar os alunos a compreender a semelhança e a simetria.

Genericamente, transformações geométricas são aplicações bijectivas do espaço sobre si mesmo (Franco de Oliveira, 1997) ou, como explicitam Cabrita et al. (2009), correspondências biunívocas do conjunto de todos os pontos do plano (ou de todos os pontos do espaço) sobre si próprio. Neste estudo, restringir-nos-emos ao espaço bidimensional euclidiano ou plano euclidiano, que se designará por IR^2. No plano euclidiano IR^2, uma transformação geométrica é uma função T definida para todos os pontos de IR^2, nas seguintes condições (Cabrita et al., 2008):

a) A cada ponto P de IR^2, T faz corresponder um (e um só) ponto T(P) de IR^2, designado, frequentemente por P' e chamado imagem ou transformado de P por meio de T;

b) Se M e N são dois pontos distintos de IR^2, então M' e N' são dois pontos distintos (de IR^2), ou seja, a dois pontos distintos correspondem sempre duas imagens distintas;

c) Para qualquer ponto S de IR^2, existe sempre um ponto U de IR^2 tal que S é imagem de U por meio de T, ou seja, todo o ponto de IR^2 é imagem de um ponto de IR^2.

Por questões de simplificação e coerência, e uma forma geral, denotar-se-á por A', B', C',… as imagens dos pontos A, B, C, … por ação de uma transformação geométrica.

São exemplos de transformações geométricas a rotação, a translação, a reflexão, a reflexão deslizante, a dilação ou a homotetia e a semelhança em espiral (Franco de Oliveira, 1997; Veloso, 1998; 2012). Ainda de acordo com Franco de Oliveira (1997, p.49), toda a transformação geométrica tem inversa e a composta de uma transformação com a sua inversa é a transformação identidade, que transforma cada ponto em si próprio. Ou seja, a transformação identidade é o elemento neutro da operação composição. Várias transformações geométricas tendem a estar conotadas com uma a noção de movimento. Em termos puramente matemáticos, o que interessa é a representação desse fenómeno físico através da correspondência Matemática que se reporta a todo o plano e não apenas a um ponto ou a uma figura do mesmo (Cabrita et al., 2009).

Neste estudo, a atenção centrou-se nas transformações geométricas isométricas do plano euclidiano. Por outras palavras, aquelas que preservam as distâncias entre os pontos, também conhecidas como movimentos rígidos do plano pelo facto de não alterarem a forma nem as dimensões dos objetos e permitirem a obtenção de figuras congruentes (Franco de Oliveira, 1997; Cabrita et al., 2008). Assim, uma isometria no plano euclidiano pode definir-se como uma aplicação T do plano tal que, para quaisquer dois pontos P e Q, se tem: $\overline{PQ}$ = $\overline{T(P)T(Q)}$ (Franco de Oliveira, 1997; Breda et al., 2011). Ou seja T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ é uma isometria quando e só quando $\overline{T(P)T(Q)}$ = $\overline{PQ}$. Desta definição resultam algumas propriedades das aplicações isométricas (Cabrita et al., 2008):

- são injectivas;
- preservam a colinearidade ou, mais genericamente, preservam a relação estar entre, isto é, para quaisquer pontos P, Q, R, tem-se P-Q-R sse P'-Q'-R';

- preservam os triângulos, isto é, três pontos são não colineares sse os seus transformados são não colineares;
- preservam a distância e a métrica e transformam figuras geométricas em figuras geométricas congruentes;
- são bijecções no conjunto de todos os pontos e induzem bijecções no conjunto das linhas;
- são colineações, isto é, preservam as incidências.
- Pode entender-se incidência como uma relação de pertença. Assim, o ponto P incide com uma linha se pertence à linha (Franco de Oliveira, 1997).

O conjunto das isometrias (*i*) do IR^2 é um grupo - grupo euclidiano - para a operação habitual de composição de funções "**o**". Considerando (IR^2,**o**):

- a operação é fechada, isto é a composição de quaisquer duas isometrias é ainda uma isometria. Simbolicamente - $\forall i_1, i_2 \in IR^2, i_1 \mathbf{o}\, i_2 \in IR^2$
- a operação é associativa - $\forall i_1, i_2, i_3 \in IR^2, (i_1 \mathbf{o}\, i_2) \mathbf{o}\, i_3 = i_1 \mathbf{o}\, (i_2 \mathbf{o}\, i_3)$
- existe elemento identidade - $\forall$ i'$\in IR^2\ \forall\, i_1 \in IR^2$, i' $\mathbf{o}\, i_1 = i_1\, \mathbf{o}$ i'$= i_1$
- todo o elemento tem inverso - $\forall i_1 \in IR^2, \exists i_2 \in IR^2, i_1 \mathbf{o}\, i_2 = i_2 \mathbf{o}\, i_1 =$ i'

Se a operação ainda gozar de propriedade comutativa - $\forall i_1 \in IR^2, i_1 \circ i_2 = i_2 \circ i_1$ - o grupo diz-se abeliano.

No plano euclidiano, IR^2, existem apenas quatro tipos diferentes de isometrias - a translação, a reflexão, a rotação e a reflexão deslizante que permitem que um objeto e o seu transformado pela aplicação sejam congruentes.

Translação

Considere-se, então, a translação, entendida por diversos autores como a mais simples das transformações isométricas. A imagem mental de uma translação corresponde a uma deslocação retilínea e, inerente a esta, está a noção de segmento de reta orientado - o vetor. Na translação, todos os pontos sofrem um deslocamento (rígido) na mesma direcção, sentido e medida de comprimento. É uma transformação geométrica de qualquer ponto *M* do plano associada a um vetor. Sendo $\vec{u}$ um vetor qualquer não nulo, a translação associada a $\vec{u}$ é a transformação $T_{\vec{u}}$: $IR^2 \to IR^2$ definida por $T_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u} = M'$

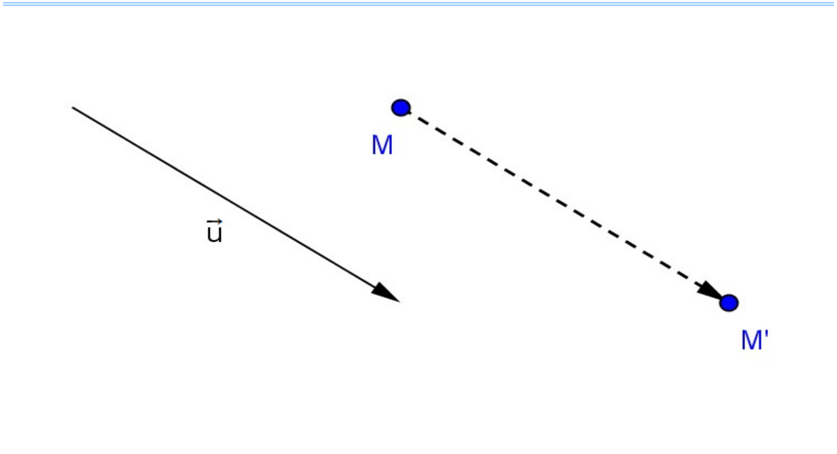


Fig. 2 - Translação de qualquer ponto do plano

M' é o transformado ou imagem do ponto M pela $T_{\vec{u}}$. A translação associada ao vector nulo $T_{\vec{0}}(M) = M$ é a transformação identidade. Todos os pontos são invariantes. A translação definida pelo vetor simétrico -$\vec{u}$ é a inversa da translação $T_{\vec{u}}$.

Para além das propriedades comuns a todas as isometrias, já mencionadas anteriormente, na translação associada ao vetor $\vec{u}$ observa-se que:

- a orientação é preservada;
- uma reta (semirreta, segmento de reta) é transformada numa reta (semirreta, segmento de reta) paralela(o);
- não há pontos fixos.

Note-se que uma reta pode ser transformada nessa reta (se o vetor tiver a mesma direção da reta) mas os seus pontos não ficam fixos (Cabrita et al., 2008).

A composição de duas translações de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é uma translação de vetor $\overrightarrow{u+v}$.

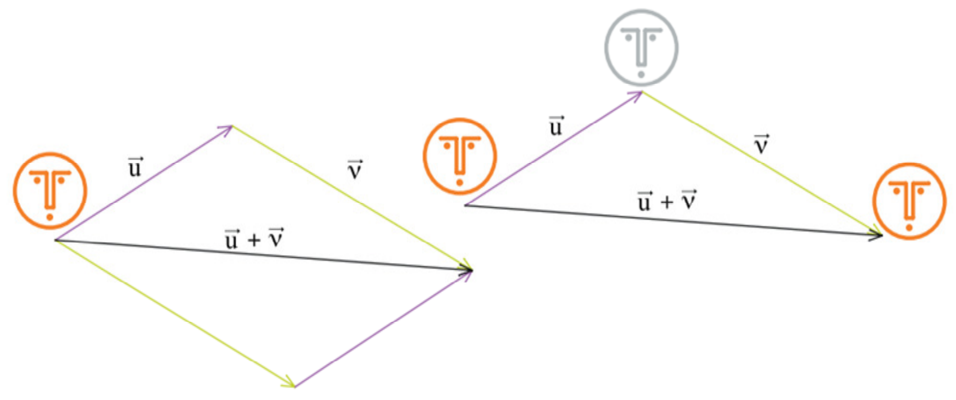


Fig. 3 - Composição de duas translações (fonte: Cabrita et al., 2008)

A composição de duas translações é uma translação (propriedade de fecho); é associativa e comutativa; tem elementos identidade e admite inverso.

Rotação

A rotação admite a existência de um ponto fixo, em torno do qual se processa o "movimento" de todos os pontos do plano de acordo com a mesma medida de amplitude de ângulo e sentido. Por convenção, estabelece-se que no sentido direto (anti-horário) as medidas de amplitude são positivas e são negativas no sentido retrógrado (sentido horário). Uma rotação de centro O e ângulo α (que pode oscilar entre -360º e + 360º) é a aplicação $R_{(O,\alpha)}$: $IR^2 \rightarrow IR^2$ que fixa O e envia B em B', tal que $\overline{BO}$ = $\overline{B'O}$ e em que $\angle BoB'$ = α . Se $B = O, R_{(O,\alpha)}(B) = O$.

Assim [A'B'C'O'] é a imagem do quadrilátero [ABCO] por $R_{(O,+90º)}$

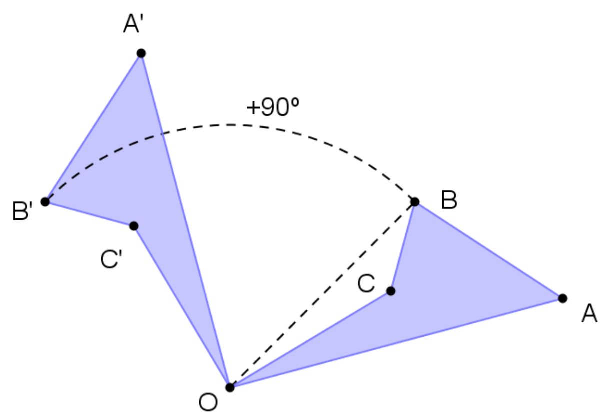


Fig. 4 - Rotação de centro O e medida de amplitude do ângulo de + 90º do quadrilátero [ABCO]

Relativamente aos casos especiais das rotações, em que as medidas de amplitude do ângulo de rotação são 0º, 360º ou -360º, independente do centro de rotação, resumem-se à transformação identidade pois as imagens de todos os pontos coincidem com eles próprios.

As rotações de medida amplitude 180º ou -180º constituem um caso particular e denominam-se meia-volta. A figura seguinte mostra uma rotação de centro O e medida de amplitude +180º. Trata-se de uma isometria em que a imagem de F é o ponto F' tal que F', O e F são colineares e O é o ponto médio de $\overline{FF'}$.

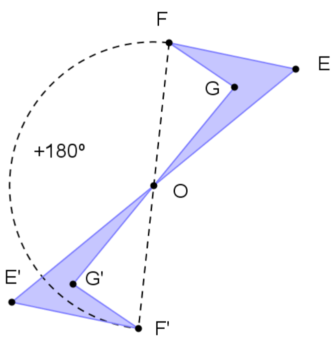


Fig. 5 - Exemplo de uma meia-volta

A composição de duas rotações com o mesmo centro e com medidas α_1 e α_2 de amplitude de ângulos é uma rotação com esse centro e cuja medida de amplitude de ângulo é $\alpha_1 + \alpha_2$ (Cabrita et al., 2008).

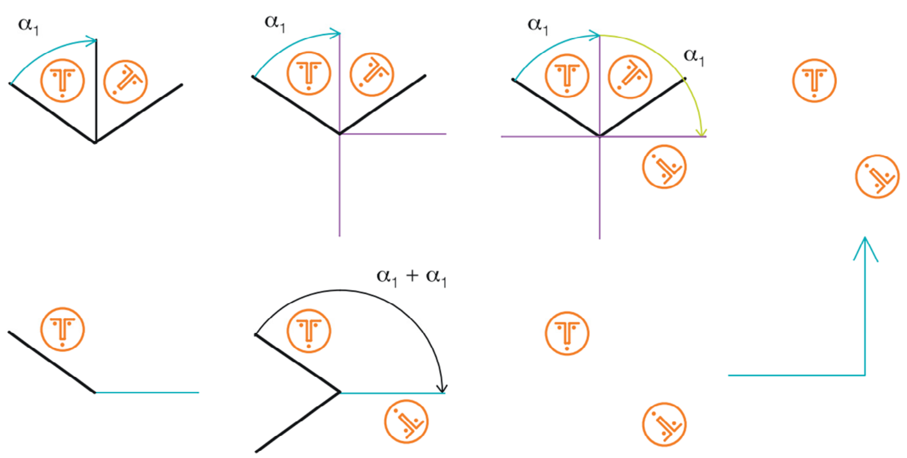


Fig. 6 - Composição de duas rotações (fonte: Cabrita et al., 2008)

A composição de duas rotações com o mesmo centro é uma rotação (propriedade de fecho); é associativa e comutativa; tem elementos identidade e admite inverso.

As rotações apresentam como características particulares:

- a preservação da orientação;
- admitem um ponto fixo que é o próprio centro de rotação.

Reflexão

A reflexão ou inflexão axial caracteriza-se pela existência de um eixo r onde a distância de um ponto da figura a esse mesmo eixo é igual à distância do eixo à sua imagem. É uma aplicação $f: IR^2 \rightarrow IR^2$ que fixa a reta r ponto a ponto e envia D em D' tal que r é a mediatriz de [*DD'*]. A distância de um ponto ao eixo de reflexão é igual à distância da imagem desse ponto ao eixo. A reflexão pode ser de eixo vertical, horizontal ou oblíquo.

Denota-se por R_r a reflexão sobre a reta *r* sendo esta o eixo de reflexão. Esta transformação apresenta as seguintes propriedades:

- os pontos do eixo não se "movem" por efeito de reflexão;
- inverte a orientação;
- um ponto e a sua imagem estão numa mesma reta perpendicular ao eixo;

Na figura que a seguir se apresenta, D' é o transformado de D pela reflexão R_r e D é o transformado de D' por essa reflexão. Percebe-se, também, que o conjunto de todas as imagens dos pontos de uma figura F_1 por uma reflexão R_r forma uma figura F_2 que se constitui também como objeto de F_1 por essa mesma reflexão.

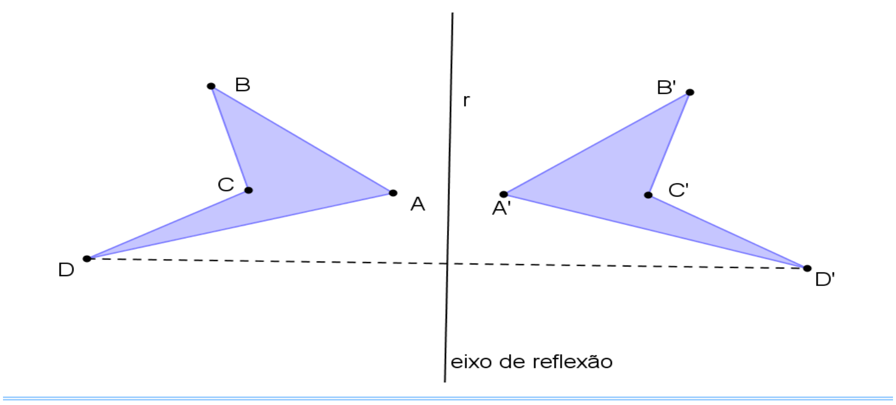


Fig. 7 - Reflexão de um quadrilátero [ABCD) associada ao eixo r

Reflexão deslizante

A reflexão deslizante $R_{r,\vec{u}}$ é uma isometria obtida pela composição de uma reflexão de eixo r com a translação não trivial $T_{\vec{u}}$ de tal modo que a distância de um ponto ao eixo seja igual à distância da imagem desse ponto ao eixo (Cabrita et al., 2008). Por outras palavras, trata-se da composta de uma reflexão, associada à reta r, com uma translação cujo vetor associado $\vec{u}$ tem a mesma direção de r (idem). A reflexão deslizante denota-se por $R_{r,\vec{u}}$

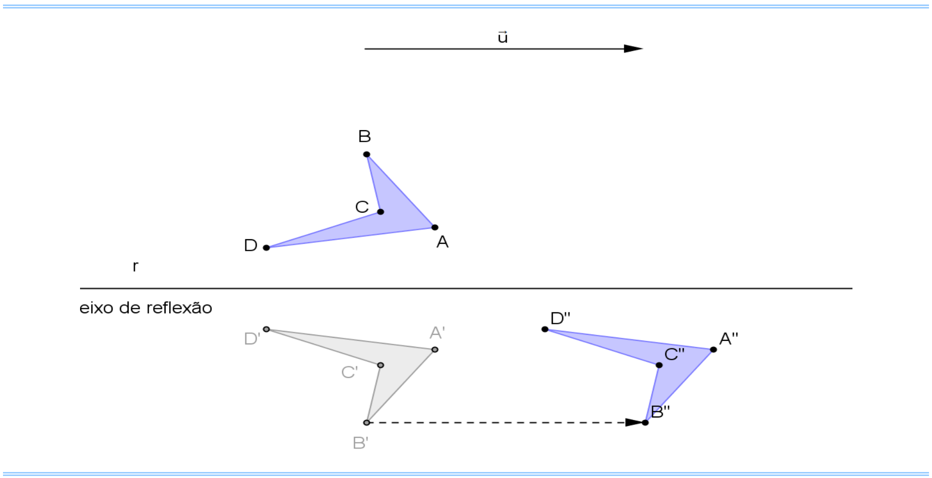


Fig. 8 - Reflexão deslizante de um quadrilátero [ABCD) associada ao eixo r e ao vetor $\vec{u}$

Como características particulares desta isometria observar-se que (Cabrita et al., 2008):

- A reta é fixada globalmente, mas não pontualmente;
- Não há pontos invariantes. Apesar de a reflexão deixar todos os pontos do eixo de reflexão invariantes, a translação desloca todos os pontos segundo a direção do eixo;
- A orientação é invertida (p.101).

Composição de isometrias

A composição de duas quaisquer reflexões merece também alguma atenção. O desenvolvimento desta questão conduz à exploração de dois casos: quando se observa que os eixos são paralelos e quando se observa que eles são concorrentes. No primeiro caso, a composição de duas reflexões de eixos paralelos corresponde a uma translação de direção perpendicular às duas retas, com sentido da primeira para a segunda e medida de comprimento do vetor igual a duas vezes a distância entre as duas retas (Cabrita et al., 2008). No caso particular de duas reflexões de eixos paralelos coincidentes, considera-se a sua redução à transformação identidade. De forma análoga, mas no sentido inverso, a uma translação também se pode fazer corresponder uma composta de duas reflexões de eixos paralelos entre si, e perpendiculares ao vetor, com a distância entre eles a ser igual a metade da medida do comprimento do vetor. Note-se que há que ter em conta a ordem das retas, de acordo com o sentido do vetor.

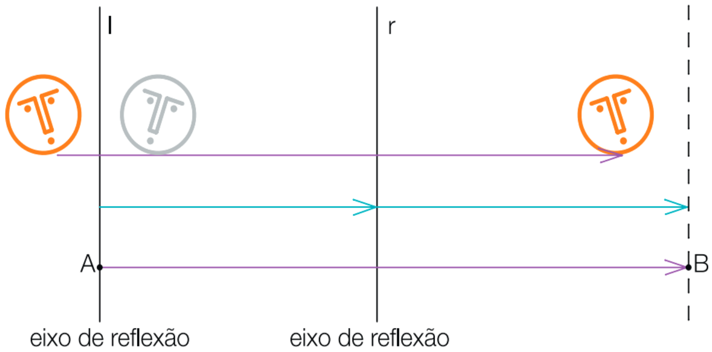


Fig. 9 - Translação como composição de duas reflexões de eixos paralelos (fonte: Cabrita et al., 2008)

No respeitante ao segundo caso, o resultado da composição de duas reflexões de eixos concorrentes corresponde a uma rotação de centro no ponto de intersecção dos eixos e de amplitude igual a duas vezes a amplitude do ângulo formado pelas retas (Cabrita et al., 2008).

Como se mostrou anteriormente para a translação, é também possível fazer corresponder a uma rotação uma composição de duas reflexões de eixos concorrentes no centro de rotação (ver figura seguinte).

Fig. 10 - Rotação como composição de duas reflexões de eixos concorrentes (fonte: Cabrita et al., 2008)

A composição de reflexões não é, geralmente, uma reflexão. Não se pode, portanto, falar do grupo das reflexões pois não se verifica a propriedade de fecho. De facto a composição de três reflexões é uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Se os eixos forem de um feixe paralelo, a composição é uma reflexão numa única reta do mesmo feixe (Franco de Oliveira, 1997).

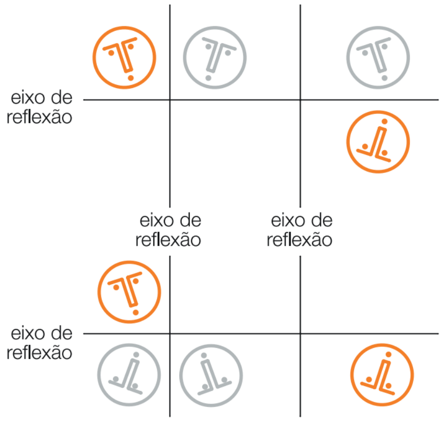


Fig. 11 - Reflexão deslizante como composição de duas reflexões de eixos paralelos (fonte: Cabrita et al., 2008)

Se os eixos das três reflexões forem concorrentes no mesmo ponto, a respetiva composição é uma reflexão; se os eixos de reflexão se intersectam em três pontos distintos, então a composição das três reflexões é uma reflexão deslizante; se dois e só dois dos três eixos são paralelos e o terceiro é transversal a estes dois, então a composição das três reflexões é uma reflexão deslizante (Cabrita et al., 2008).

As isometrias podem ser de dois tipos: isometrias positivas ou diretas e isometrias negativas ou inversas:

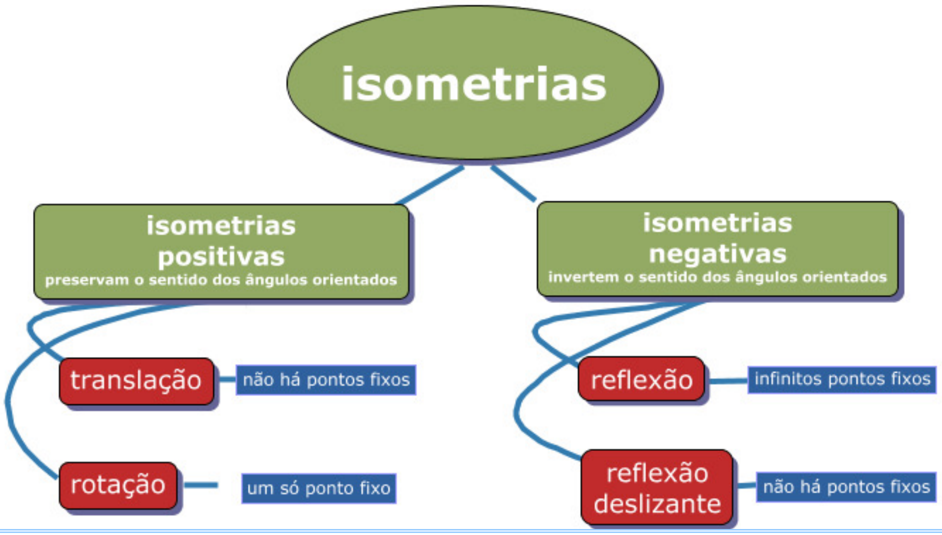


Fig. 12 - Esquema adaptado de Cabrita et al., 2008

Toda a isometria direta, translações e rotações, é composição de duas reflexões; toda a isometria indireta ou é uma reflexão ou é composição de três reflexões (idem).

2.4. Simetria

"Symmetry is almost nature's language."
Marcus du Sautoy

No âmbito da Geometria, o conceito de simetria tem estado associado ao de reflexão e ou simetria axial. Trata-se, contudo, de uma conceção no mínimo redutora que deve ser substituída por outra expressa na literatura Matemática internacional e que corresponde, há muito, à adoptada pelos estudiosos da cristalografia (Veloso, 1998, 2012). Em primeiro lugar, importa esclarecer que simetria diz respeito à própria figura e não a uma figura e à sua imagem. Neste sentido, para que uma figura (subconjunto de pontos) apresente simetria, é necessária a existência de pelo menos uma transformação geométrica distinta da identidade que deixe a figura globalmente invariante. Formalizando o conceito, "Dizemos que uma isometria f é uma simetria para a figura *F* se *f* fixa (deixa invariante) essa figura, isto é, se *f* (*F*) = *F*" (Breda et al. 2011, p.96).

A composição de duas simetrias de uma dada figura *F* é ainda uma simetria de *F* e que a transformação inversa de uma simetria de *F* é ainda uma simetria de *F*. O conjunto constituído por todas as simetrias de *F,* munido da operação composição de funções, é um grupo e constitui o grupo de simetria de *F* (Veloso, 1998; Breda et al., 2011). De acordo com Breda et al. (2011), quando a reflexão numa reta *t* faz parte do grupo de simetria de uma dada figura *F* diz-se que esta possui simetria axial (simetria por reflexão) e que *t* é um eixo de simetria dessa figura. Nesta linha conceptual, diz-se que uma dada figura *F* possui simetria rotacional (simetria por rotação) de ordem $n,\ n > 1$ quando o grupo de simetria dessa figura possui n rotações com centro num mesmo ponto, *O*, e de amplitudes $\frac{360k}{n}, k = 1,2,3,\ldots,n$

Ainda de acordo com os mesmos autores, uma figura F possui simetria central se a rotação de medida de amplitude 180º faz parte do grupo de simetria que essa figura possui. Se qualquer figura com simetria central é uma figura com simetria rotacional, nem todas as figuras com simetria rotacional que têm simetria central. Por outro lado, quando a translação faz parte do grupo de simetria de uma dada figura, diz-se que esta possui simetria translacional (simetria por translação) (Breda, 2006).

Assim, o grupo de simetria de uma figura é constituído pelas isometrias que a deixam invariante. Atente-se nos grupos de simetria discretos: os grupos de padrões do plano, os grupos das figuras que se repetem numa só direção e os grupos finitos. Para evitar repetições, dir-se-á que são iguais os grupos que se obtêm a partir de modelos distintos mas com o mesmo tipo de regras (a estrutura do grupo é a mesma).

De acordo com Bellingeri et al. (2003), os grupos discretos admitem três grandes categorias:

- Grupos que não contêm translações – são grupos finitos em que as rotações são rotações a *n* voltas, que incluem os grupos de simetria dos polígonos, e são chamados por grupos de rosáceas;
- grupos que contêm translações numa só direção – são grupos infinitos e designam-se por grupos de frisos;
- grupos que contêm translações em direções diversas - são grupos infinitos, incluem os grupos de simetria das pavimentações planas e designam-se grupos de "papéis de parede".

Em síntese:

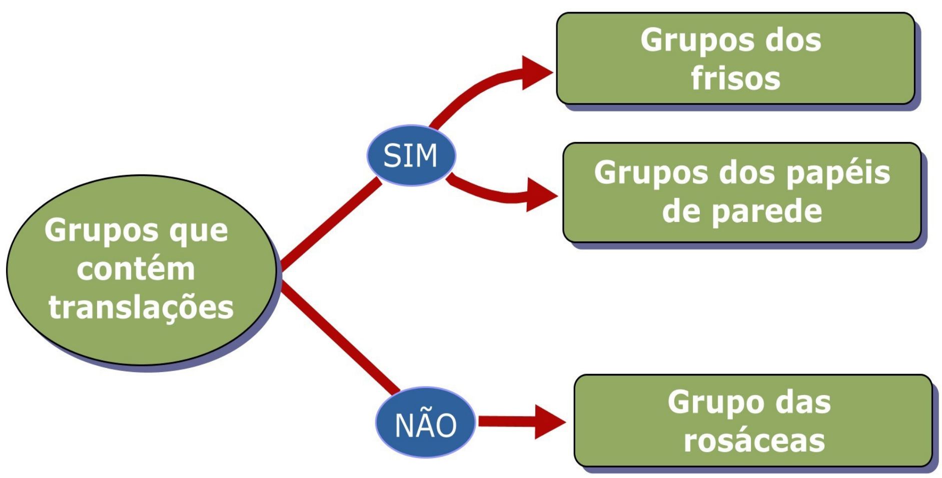


Fig. 13 - Esquema adaptado de Caputi & Gerônimo (s/d)

3. Acerca da Tecnologia

"A tecnologia não trabalha, a tecnologia não faz nada. As pessoas sim."
Papert & Caperton (2004)

Simultaneamente à assunção da importância da Geometria como área da Matemática, observa-se uma crescente valorização de metodologias que promovam aprendizagens ativas e significativas por parte dos alunos. Tendo sido o termo utilizado por Adams e Hamm (2009), a designação mais "popular" para a sociedade atual parece ser a de sociedade de informação (Patrocínio, 2002) e que se pretende que evolua para sociedade do conhecimento (Hargreaves, 2004; Bell, 2006). A Escola, na assunção das suas responsabilidades enquanto instituição, deve, de forma consciente, contribuir ativamente para promover os conhecimentos, capacidades, valores e atitudes indispensáveis para que os seus alunos se integrem devidamente nessa mesma sociedade. Numa conferência que se realizou no X Encontro da AFIRSE em Dezembro de 2002 e cujo artigo foi publicado na revista Ibero Americana de Educação, Ponte (2000b) afirma que:

> "Todas as épocas têm as suas tecnologias. Os utensílios de pedra, o domínio do fogo e a linguagem constituem as tecnologias fundamentais que, para muitos autores, estão indissociavelmente ligadas ao desenvolvimento da espécie humana há muitos milhares de anos. Hoje em dia, as tecnologias de informação e comunicação (TIC) representam uma força determinante do processo de mudança social, surgindo como a trave-mestra de um novo tipo de sociedade – a sociedade de informação." (p.64).

O NCTM (1991), constatando que o sistema educativo da época industrial não corresponde às necessidades económicas do tempo presente e propondo definir linhas de orientação para a reforma da Matemática, considera que a sociedade espera que as escolas garantam que todos os estudantes tenham oportunidade de se tornar matematicamente alfabetizados, sejam capazes de prolongar a sua aprendizagem, tenham iguais oportunidades de aprender e se tornarem cidadãos aptos a compreender as questões em aberto numa sociedade tecnológica. Tal como a sociedade muda, também as suas escolas devem transformar-se. Mais de duas décadas volvidas, a consideração mantém-se pertinente.

Saraiva (1991) sugere que a utilização do computador parece ter contribuído para uma forma diferente de encarar a Matemática. Segundo este investigador, os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável e de maior interesse porque já acham que a Matemática se torna mais clara, entusiasmante e mais engraçada deixando de ser intransponível.

O computador é um meio poderoso e de excelência no processo educativo, pois "facilita e expande a habilidade natural das crianças e proporciona oportunidades de construção, formulação de hipóteses, exploração, experimentação, avaliação e conclusão, em suma, aprender tudo por si próprias." (Entrevista concedida por Papert a Dan Schwartz em 1999, disponível a 20/10/2013 em http://www.papert.org/articles/GhostInTheMachine.html) citado por Ribeiro (2005).

De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2008), o uso da tecnologia, em particular dos computadores, constitui um dos princípios para o ensino da Matemática. Acrescenta, ainda que, a tecnologia não deverá ser usada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar, pelo contrário, poderá e deverá ser usada para estimular essa compreensão e intuição.

Pode também ler-se no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) que a utilização de computadores, quer no domínio geométrico, como numérico, é enriquecedor das aprendizagens com especial importância na resolução de problemas e no desenvolvimento de atividades de investigação, pois permite aos alunos concentrarem-se nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados.

Segundo Frant (2002), referido por Ribeiro (2005), a integração do computador na sala de aula, particularmente nas aulas de Geometria, proporcionou a possibilidade de se manusearem os objetos geométricos, introduzindo, nesta área da Matemática, novos conceitos como "mexer" e "arrastar". Trata-se de poder encarar a Geometria de uma forma completamente diferente, num "ambiente de aprendizagem, que favorece o desenvolvimento de outros raciocínios" (p.166) porque a oportunidade de trabalhar a Geometria de uma forma dinâmica, permite a abordagem de "novos problemas." (idem). Lu (2008) acrescenta também que tem havido uma crescente consciência de que a interatividade entre seres humanos e tecnologias pode facilitar eficazmente o ensino e aprendizagem.

Para Breda et al. (2011), "a tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções geométricas sobre diferentes perspetivas" (p.21).

Isto não implica, necessariamente, a marginalização do papel e do lápis. Laborde (1993) sugere que, nos ambientes geométricos, pode ser executado um maior leque de ações, manipulando facilmente objetos mais complexos, conseguindo-se realizar tarefas com um grau de complexidade crescente e superior às que eram executadas nos ambientes clássicos (papel e lápis). Esta investigadora é de opinião que essa complexidade pode conduzir a um progresso intelectual dos alunos se induzida através de situações de ensino e de aprendizagem adequadas para quem imagens dinâmicas desencadeiam fenómenos visuais mais fortes do que imagens estáticas (Laborde, 1998). A este propósito Ponte, Branco e Matos (2009) interrogam-se: "Devem aprender primeiro os conceitos e processos pelos «métodos tradicionais», baseados no papel e lápis, ou devem aprendê-los, desde o início, usando estes instrumentos? E com que propósito devem usar a tecnologia – para confirmar os resultados já obtidos com métodos de «papel e lápis» ou como instrumento de exploração?" (p.17). Em forma de resposta, os mesmos autores, defendem que a abordagem dependeria da familiaridade dos alunos com os instrumentos tecnológicos subjacente ao seu meio cultural, aos seus interesses e preferências além dos recursos existentes na escola e da experiência professor (idem). A utilização de ambientes recorrendo a papel e lápis caracteriza-se pela sua grande simplicidade e comodidade e não pode ser excluída da sala de aula. De acordo com Laborde (2001), a perceção da necessidade de conseguir aprender com papel e lápis também está influenciada pelo facto de, institucionalmente, as provas de exame se realizarem habitualmente num ambiente de papel e lápis. Parece emergir daqui um compromisso que resulte da utilização de ambos os tipos de ambiente, que tire partido das vantagens de cada um e minimize as suas desvantagens. O próprio programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), sugere, nas suas indicações metodológicas uma abordagem complementar na área da Geometria:

> "No estudo deste tema, é fundamental o recurso a instrumentos de medida e de desenho — régua, esquadro, transferidor, compasso — bem como a utilização de materiais manipuláveis — geoplanos, tangrans, puzzles, mosaicos, peças poligonais encaixáveis, cartolina e elásticos, armações e palhinhas, mira e espelhos. Todos estes instrumentos e materiais são um apoio importante para a aprendizagem em Geometria, em particular na exploração, análise e resolução de problemas de natureza geométrica e na realização de desenhos e construções com um rigor adequado. Os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os applets favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados." (p.37).

Ao inexorável avanço da inclusão do computador na Escola não corresponde uma aceitação pacífica por parte dos professores e da sociedade em geral. Segundo Ribeiro (2005), problemas associados aos custos de hardware, à desadequação de software e à insuficiente formação proporcionada por algumas instituições de formação de professores podem transformar-se em obstáculos a ultrapassar para uma utilização mais generalizada, sistemática e consistente do computador na Escola.

Independentemente de todas as evidências e apesar de existir material em quantidade e qualidade aceitáveis, alguns investigadores (e.g., Marcinkiewiecz, 1991; Becker, 1994; Goodson & Mangan, 1996, referidos por Cabrita, 1998) (referidos por Ribeiro, 2005), consideram que os professores utilizam os computadores de forma esporádica, desadequada e não sistematizada.

3.1. Tecnologia e Construtivismo

Numa visão "instrucionista", o papel do computador na educação resume-se à possibilidade que oferece para informatizar os meios tradicionais de ensino. O computador apresenta a informação e disponibiliza um ambiente para a realização de jogos e exercícios, papel análogo ao que habitualmente desempenhou o manual escolar. Torna-se, assim, numa espécie de tutor/instrutor cuja função é proporcionar informações num fluxo modulado pela capacidade individual de cada aluno. Assume, de certa forma, o papel do professor transmissor da informação (Valente, 2001). Assim, a utilização do computador e de software educativo no processo de ensino e de aprendizagem não significa, por si só, uma alteração do papel do aluno que, ao lhe ser negada a possibilidade de explorar com autonomia os diversos problemas, (re)construindo e partilhando o conhecimento, permanece num registo passivo (idem).

Uma utilização do computador que promova ambientes de aprendizagem poderosos, onde o aluno, em interação com os objetos, com os outros e com o mundo construa o seu saber, será muito mais rica e valiosa, passando-se de uma perspetiva instrucionista para uma perspetiva construtivista (ibidem).

De acordo com a teoria construtivista, o desenvolvimento ocorre através da interação do sujeito com o mundo, com os objetos e situações, descobrindo e compreendendo as características e propriedades dos mesmos, transformando informações complexas e construindo as suas próprias asserções e soluções para os problemas. Neste perspetiva, o professor assume o papel de facilitador, criador de ambientes de aprendizagem ricos que proporcionem ao aluno situações em que se envolva ativamente, centrando o processo no aluno e com a perceção de que a aprendizagem depende, em muitos casos, do contexto, das suas crenças e atitudes (Trinity College, 2002). De outro modo, o construtivismo assenta na ideia de que o conhecimento não é recebido do exterior, mas o resultado de um processo de construção mental que é reflexo das experiências realizadas e da ligação de novas informações com outras já existentes. Como paradigma, o construtivismo sugere que a existência do mundo real tem significado apenas quando conferido pelas pessoas e pela cultura, privilegiando os processos e não os produtos acabados, a descoberta guiada em vez da aprendizagem expositiva, as situações reais de aprendizagem e não as abstratas ou artificiais e múltiplas experiências para conhecimentos significativos (idem).

A conceção do um conhecimento como um bem transmissível, que os alunos aprendem pelo simples copiar de ideias, ler ou ouvir informações que retêm na sua mente, foi rebatida por Piaget ao defender uma perspetiva cognitivista do construtivismo assente no princípio de que a aprendizagem é uma compilação de complexas estruturas de conhecimento (Guzdial, 1997). Segundo Arendt (2003), não existem estruturas cognitivas inatas, o aluno age sobre os objetos para obter conhecimentos.

Papert, ao invés de criticar ou reformular os princípios do cognitivismo procurando adaptar um pensamento epistemológico, e não pedagógico, à aprendizagem escolar reconstruiu, em termos teóricos, o construtivismo piagetiano (Antunes, 2003).

O construcionismo apresenta-se, segundo Kafai e Resnick (1996), como uma teoria de aprendizagem e uma estratégia para a educação. Baseado no princípio segundo o qual o conhecimento não é simplesmente adquirido mas construído, formando-se estruturas de conhecimento (knowledge structures) suportadas pelas experiências e interações com o mundo, o construcionismo acrescenta um outro pressuposto, segundo o qual o aluno aprende efetivamente quando constrói "artefactos" significativos e pessoais. Esta ideia é também defendida por Fino (1998) quando refere que o construcionismo acrescenta que o sujeito, para além de ser um construtor ativo da aprendizagem, desenvolve construções particulares que são externas e partilhadas, que não devem ser ignoradas. Kafai e Resnick (1996), também nesta de linha de pensamento, referem que o construcionismo sugere que os alunos constroem novas ideias e desenvolvem conceitos quando trabalham ativamente na produção de artefactos externos, como um poema, um castelo de areia, um programa de computador, sobre os quais podem refletir, partilhar e discutir com os outros.

Descobrir caminhos em que as tecnologias permitam às crianças usar e alcançar conhecimentos diversos, não através da memorização de informações relevantes que anos depois estarão esquecidas, mas construindo conhecimentos que se apresentarão disponíveis nas situações certas e necessárias, é o objetivo do construcionismo (Papert, 1980).

De acordo com Papert, as crianças são então capazes de pensar e compreender conceitos abstratos, desde que lhes seja fornecida uma máquina inteligente ou um artefacto que proporcione a ligação entre o conhecimento sensório e o abstrato, tal como entre o mundo individual e o social. Segundo o mesmo autor (1993), as "Novas Tecnologias" facilitam a aprendizagem quando disponibilizam um conjunto de instrumentos que suportam diversos estilos intelectuais.

A construção de conhecimento, "com" e "para" os outros, aponta para outras perspetivas do construtivismo de carácter mais social: o sócio-construtivismo e o construtivismo comunal.

O construtivismo social, influenciado por Vygotsky, partindo do princípio construtivista de que o estudante está envolvido no processo de construção do seu conhecimento, acrescenta que esta ocorre pela e na interação com os outros (Holmes et al., 2001). Preconiza também, baseado nos contributos de Vygotsky (1987) e Bruner (1990), que a aprendizagem e o desenvolvimento são atividades sociais colaborativas, nas quais a comunidade assume um papel central conduzindo o aluno à construção de significado nas zonas de desenvolvimento proximal (Cabrita, 2005). Segundo Vygotsky, o indivíduo constrói conhecimento da zona de desenvolvimento próximo (ZDP) que não conseguiria construir sozinho, dada a sua zona de desenvolvimento atual (ZDA), a partir da interação com os outros "peritos" no assunto (idem).

O construtivismo comunal defende uma abordagem onde os alunos, para além de construírem o seu próprio conhecimento (construtivismo), como resultado da interação com o seu ambiente (construtivismo social), estão também envolvidos ativamente no processo de construção do conhecimento para a sua comunidade de aprendizagem (Holmes et al., 2001).

A ideia da partilha parece ser, então, o seu traço característico. Cabrita (2005) reforça esta conceção ao considerar que no processo de partilha o sujeito reconstrói o seu próprio conhecimento. Nesta perspectiva, emerge a importância de valores como a responsabilidade, o apoio, a cooperação e a colaboração.

3.2. Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica

Segundo Veloso (2002), "programas de geometria dinâmica contribuem para que o ensino da Geometria constitua uma verdadeira experiência matemática para os alunos... não se pode querer melhor renovação para o ensino da Matemática do que esta!" (p.6).

De acordo com Ribeiro (2005), estes programas têm algumas semelhanças com os programas de desenho convencionais e com a linguagem LOGO, elaborada por Papert e seus colegas em 1970 no MIT, precursora dos ADGD's e que permite às crianças utilizar conteúdos matemáticos como materiais de construção para a criação de figuras, animações, músicas, jogos, simulações no computador (LEGO Group, 2004). Apresentam, contudo, algumas características próprias: a construção de objetos não é feita por via da programação, em contraponto com a linguagem LOGO, e permitem a manipulação dos objetos construídos, objetos esses que obedecem a determinadas propriedades e que não se alteram quando são manipulados, o que os distingue dos programas de desenho. Estes programas são conhecidos como Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica ou ADGD's.

A propósito destes programas, o NCTM (2000) refere que:

> "Dynamic geometry software can allow experimentation with families of geometric objects, with an explicit focus on geometric transformations. Similarly, graphing utilities facilitate the exploration of characteristics of classes of functions. Because of technology, many topics in discrete mathematics take on new importance in the contemporary mathematics classroom; the boundaries of the mathematical landscape are being transformed." (p.27).

Como se tem constatado através das investigações realizadas nos últimos anos, Piteira (2000), Veloso (2002), Ribeiro e Cabrita (2002), Silva (2005), Ribeiro (2005), Jonassen et al., (2008), Matos (2011), Paiva (2011), Martins (2012), os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica favorecem a compreensão dos conceitos e de relações geométricas, pelo que devem ser utilizados para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas.

Outra mais-valia dos ADGD's, segundo Piteira (2000), está relacionada com o facto de estes permitirem aos alunos discutir a Matemática em contraste com uma atitude onde se limitam a escutar o professor a falar sobre ela.

Segundo Ribeiro (2005):

> "Em Geometria, a utilização de ambientes geométricos dinâmicos (AGD's) enquanto suporte visual de representação de entes abstractos e de construção de relações diversas entre estes, pode representar uma estratégia poderosa de investigação em Matemática promovendo-se, desta forma, a aquisição de conhecimentos mais vastos desta disciplina, uma capacidade mais poderosa e flexível de raciocínio e de pensamento geométrico e, ainda, uma maior capacidade de resolução de problemas exigida pela sociedade presente e futura." (p.177).

Laborde (2000), referindo-se à importância do uso dos ADGD's, sustenta que o software oferece uma visualização global de fenómenos que enriquecem as imagens mentais dos alunos e que, através do seu poder gráfico e das possibilidades que oferece de manipulação direta, são ferramentas de utilização fácil que não carece de muitas introduções, facilitando o recurso a representações geométricas muito dificilmente realizáveis de papel e lápis pelos alunos. Acrescenta ainda que, ao permitirem uma variação contínua dos parâmetros, contribuem para fomentar o estudo de problemas de uma forma geral e não apenas centrando em situações específicas. Este aspecto é central na aprendizagem matemática, pois os alunos devem aprender a olhar para um problema de forma geral, manipular os dados e estabelecer os casos particulares.

Lu (2008) refere: a interatividade direta com as ferramentas fornecidas pelo sistema que permitem a manipulação, construção e exploração de dados e descoberta das relações entre múltiplas representações; a manipulação matemática e a comunicação para a aprendizagem; a ligação da representação visual com outras formas de representação e a consequente melhoria na aprendizagem através do envolvimento efetivo dos alunos com a Matemática. Esta interatividade não se circunscreve ao domínio "funcional" própria de um ensino que nos remete para as teorias behaviorista ou comportamentalista. Não se trata, portanto, da substituição do manual ou do professor por um computador com as mesmas funções. Como escreve Borges (1994, p.52), "Importa, sobretudo, que o aluno sinta necessidade e prazer em procurar e construir ambientes ricos em informação e experiências que originem confronto entre os seus conhecimentos anteriores e a nova informação armazenada estimulando, desse modo, a progressão do processo de aprendizagem". A interatividade subjacente é uma interatividade verdadeiramente "intencional" (Moderno, 1992) que Gravina e Santarosa (1998), concretamente para os ADGD's, definem como:

> "[…] a dinâmica entre acções do aluno e reacções do ambiente, e no sentido muito além daquele em que a reação do sistema é simplesmente informar sobre "acerto" ou "erro" […]. Na interatividade que está-se pensando, o sistema oferece suporte às concretizações e ações mentais do aluno, isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes

> objetos via sua representação. […] Um meio que pretenda ser interativo, na medida do possível, não deve frustrar o aluno nos procedimentos exploratórios associados às suas ações mentais." (p.10).

No início da integração tecnológica, o feedback rico e abundante proporcionado pelos ADGDs conduz os professores a proporem aos seus alunos tarefas com um grau de complexidade maior que no papel, pressupondo que o ADGD facilita o processo de obtenção de uma solução. Mas o uso da tecnologia de *per se* e reações particulares dos estudantes a esta causam recorrentemente dificuldades não previstas que sustentam a ideia de que inovar em educação obriga a uma dilatação do tempo (Schneider 1999).

Num estudo realizado por Piteira (2000) sobre a aprendizagem da Geometria em contexto escolar utilizando um ADGD, nomeadamente o Geometer's Sketchpad, os alunos consideraram a sua utilização vantajosa no estudo da Geometria, assinalando a rapidez e o rigor como espetos essenciais. A autora corrobora esta ideia nas suas conclusões e sugere que a utilização, pelos alunos, de uma linguagem matemática rigorosa contribui para a compreensão e aprendizagem dos conceitos matemáticos (idem).

Referiu, no entanto, alguns constrangimentos na sua utilização, como o tempo gasto, em algumas situações, com aspectos técnicos e diferenças no "layout" no ecrã relativamente ao papel.

Num outro estudo implementado por Silva (2002) sobre esta aplicação, procurava-se compreender e caracterizar as práticas pedagógicas que se podem desenvolver com este software e, ainda, analisar de que forma um grupo de alunos explorava o software e quais as implicações para a compreensão de objetos geométricos. Referiu, nas conclusões, que os alunos consideraram a utilização do programa importante, exprimiram opiniões muito favoráveis sobre a sua utilização, referiram que lhes proporcionou situações de aprendizagens diferentes, capazes de melhorar a sua compreensão e consolidação dos conceitos estudados.

Um outro ADGD, o Cabri-Géomètre, tem sido explorado e alvo de algumas investigações. Bellemain (1992), partindo do pressuposto de que a manipulação de figuras desenhadas no Cabri-Géomètre pode contribuir para evidenciar as suas propriedades geométricas e desenvolver competências de resolução de problemas, concluiu que, de facto essa manipulação contribuiu para que os alunos evoluíssem no seu processo de construção das figuras geométricas atendendo, agora, às suas propriedades. Concluiu, também, que a aplicação, dada a sua natureza, permite que se evolua de uma situação de avaliação das aprendizagens por parte do professor para uma situação de validação, por parte dos alunos, das suas próprias construções (idem).

Margarida Junqueira (1995) constatou, a partir de outro estudo recorrendo ao Cabri-Géomètre sobre a exploração de figuras e suas propriedades partindo de construções geométricas "resistentes", uma evolução nas justificações dos alunos sobre a validade dos seus processos de construção de figuras geométricas, nas quais substituíram, progressivamente, a argumentação visual e empírica por outra mais rigorosa (Junqueira & Valente, 1998).

Neste contexto, Sangiacomo (1996) concluiu, a partir de outra investigação, que a utilização deste tipo de software proporciona que os alunos progridam no reconhecimento de invariantes de uma figura geométrica e da existência de uma classe de figuras que representam um objeto geométrico.

Ainda com esta aplicação, Coelho (1995), numa investigação com seis alunos do 6.º ano de escolaridade, com a qual se pretendia descrever e interpretar os processos evidenciados na resolução de problemas e na construção de conhecimentos daí recorrente por estes alunos, concluiu que a aplicação constitui um micromundo poderoso para a resolução de problemas e que os alunos fizeram progressos significativos ao nível das estratégias utilizadas na sua resolução. Salientou ainda, o facto da aplicação possibilitar a utilização de estratégias de tentativa e erro através da manipulação direta num contexto de "movimento" e, portanto, dinâmico. E que os alunos evoluíram na construção de conhecimentos.

Leme da Silva (1997) sugere que a implementação de uma sequência didáctica suportada pelo Cabri-Géomètre possibilita, aos alunos, a atribuição de significado aos conceitos geométricos e a sua aplicação a outros campos matemáticos. Rodrigues (1997) considera, também, que o Cabri-Géomètre promove uma aprendizagem ativa e dinâmica da Geometria sendo essencial para um ensino renovado da Geometria.

Outros estudos (Bardini, Pierce & Stacey, 2004), centrados no GeoGebra, sugerem que a utilização desta aplicação permite resolver problemas graficamente, permitindo aos alunos estudar um maior número de possibilidades de resolução, utilizando múltiplas representações.

Também sobre o GeoGebra, Ferreira (2010), considera que este possibilita a exploração de variados tópicos matemáticos e que, depois de algum tempo de utilização, as aulas se tornam muito produtivas ressalvando, no entanto, que os professores devem possuir um domínio do conteúdo que relegue para segundo plano os aspectos operacionais e técnicos do software. O autor considera, ainda, esta aplicação como "[...] uma excelente sugestão para práticas com a Matemática fazendo uso dos recursos tecnológicos [...]" (idem, p.16).

3.2.1 Aprender com GeoGebra

Dentro desta classe de aplicações, as mais usadas têm sido o Cabri-Géomètre, o Geometer Sktechpad e o Cinderela. Mais recentemente, surgiu o GeoGebra, criado por Judith e Markus Hohenwarter e desenvolvido por uma equipa internacional de programadores dentro de filosofia de software livre e gratuito. Esta ferramenta, que deve o seu nome à fusão dos termos GEOmetria e álGEBRA, mostra-se, de facto, extraordinariamente versátil e poderosa, sendo capaz de aliar, de forma muito eficaz, o contexto geométrico com as suas representações algébricas e de cálculo. Foi desenvolvida especificamente para potenciar a aprendizagem e o ensino da Matemática nas escolas juntando a Geometria, a Álgebra e o Cálculo (Hohenwarter & Jones, 2007). O GeoGebra está disponível de forma gratuita em www.geogebra.org. Ainda segundo Hohenwarter e Jones (2007), tal programa foi traduzido em quarenta línguas e há evidências de uma utilização em larga escala.

No GeoGebra, a possibilidade da manipulação gráfica associada à correspondente representação algébrica emerge como um traço distintivo desta aplicação quando comparada com outras, incluindo algumas de natureza comercial. Duval (2006) e Misfeldt (2009) consideram que a possibilidade de ligação entre a Geometria e a Álgebra e a representação semiótica interligando as construções com o seu significado algébrico é uma grande vantagem deste software. O facto de as duas janelas possibilitarem a exploração de conceitos matemáticos nas duas vertentes, descompartimentando a Matemática curricular, permite uma visão globalizante (idem). Os benefícios desta relação na melhor compreensão de conceitos matemáticos, conseguida a partir manipulação de parâmetros e a correspondente observação gráfica dessas alterações, são também defendidos por Mehanovic (2009).

No entanto, a utilização do GeoGebra no ensino e na aprendizagem da Matemática exige o desenho de sequências de tarefas que potenciem as suas valências para o aluno. De acordo com Berger (2012), o tipo e o nível de pensamento necessário a um aluno para se empenhar com sucesso na resolução de uma tarefa matemática é a sua característica mais importante. Tarefas matemáticas que exigem “pensamento complexo e não algorítmico”, onde o aluno tem de determinar o seu próprio caminho através do problema, requerem que o aluno se envolva na sua exploração utilizando vários conceitos matemáticos, relações e processos. O computador permite libertar o aluno de forma a que este se concentre nos aspectos conceptuais da tarefa. Este autora refere-se, também, ao grau de exigência técnica de uma tarefa matemática como um aspecto a ter em consideração no "desenho" de uma tarefa, estabelecendo que esta pode parecer interessante em termos matemáticos mas exigir competências tecnológicas sofisticadas acrescentando também que as diferenças entre os dados que saem do computador e as formas usadas na matemática de papel e lápis constituem outra das preocupações na resolução de tarefas matemáticas usando ADGD’s (idem).

Num estudo recente sobre tarefas matemáticas baseadas no computador, a mesma autora mostra como um aluno usa o GeoGebra como uma ferramenta para dar sentido à tarefa matemática com que está envolvido enquanto outro o faz como ferramenta para explorar vários aspectos da mesma tarefa. Isto implica uma atenção suplementar na preparação da tarefa observando-se que esta tenha como objetivo uma dada finalidade pedagógica, com as devidas exigências matemáticas e técnicas, onde alunos diferentes podem envolver-se na tarefa de formas diferentes e com focos diversificados (ibidem).

3.3. Sistemas de Gestão de Sala de Aula (CMS)

Apesar dos benefícios evidentes, nos dias de hoje, do uso de tecnologia computorizada e respetivas aplicações, também é conhecido o facto de que esta pode perturbar o processo de ensino e de aprendizagem (Galluch & Thatcher, 2007). Hoje em dia, diversas aulas decorrem em salas TIC. A não utilização de um sistema que gira as atividades na sala para, por exemplo, bloquear o acesso a websites, restringir o uso de determinadas aplicações ou acompanhar de perto o trabalho dos alunos, pode afetar negativamente o desenvolvimento dos alunos.

Na perspetiva do construtivismo social referida anteriormente, a utilização do computador e de software educativo (artefacto) no contexto escolar pode ser dinamizada pela utilização de aplicações de gestão de atividades de sala de aula (Classroom Management System - CMS). O termo está normalmente conotado, entre os professores, com o processo que assegura que uma aula decorra de forma fluida apesar de eventuais comportamentos disruptivos de alguns alunos. O conceito implica, também, a prevenção destes comportamentos e este aspecto é, provavelmente, o mais difícil e complexo para muitos professores. Estudos efetuados por Brophy e Good (1986) e Berliner (1996) mostram que simultaneamente à ação que um professor tem de empreender para corrigir um comportamento desajustado resultante de uma gestão deficiente da sua aula ocorre um baixo nível de envolvimento académico dos alunos nas suas tarefas.

Ora, uma gestão eficiente de uma aula envolve uma comunicação clara do ponto de vista comportamental e académico e o estabelecimento de um ambiente de aprendizagem colaborativo, cooperativo e de partilha. É precisamente na consecução destes dois aspectos que reside, também, o interesse deste estudo. O CMS não deve ser utilizado apenas para o controlo do trabalho do aluno mas sim como uma ferramenta catalizadora do processo de aprendizagem e está intimamente ligado a aspectos como disciplina, motivação e respeito. Persegue como principais objetivos: (i) aumentar o grau de envolvimento dos alunos nas tarefas; (ii) aumentar o grau de colaboração, cooperação e partilha; (iii) manter os alunos focados nas tarefas (especialmente importante nos para os alunos de graus de ensino mais baixos); (iv) acompanhar, de forma simples e eficaz o trabalho desenvolvido.

Conseguir estabelecer um ambiente com estas características numa sala de aula equipada com 15 ou 20 computadores ligados em rede e à Internet e um quadro interativo carece da utilização de um CMS. Existem no mercado diversas soluções comerciais. Neste estudo optou-se por uma alternativa gratuita, o iTALC.

O iTALC (intelligent Teaching And Learning with Computers) é uma aplicação CMS *open source* desenhada para funcionar em sistemas operativos Windows e/ou Linux. O iTALC permite ao professor monitorizar e controlar remotamente qualquer estação de trabalho do seu grupo, nomeadamente, as dos alunos.

Apesar de desenvolvido originalmente para Linux, em 2006 foi acrescentado suporte para Windows e, neste momento, consegue gerir ambientes com os dois sistemas a operar simultaneamente. Baseado no protocolo RFB (Remote Framebuffer), o iTALC trabalha com conexões TCP (Transmission Control Protocol) com a vantagem de permitir "demonstrações" e controlo remoto nos terminais da rede local, e, através de VPN (Virtual Private Network), em computadores de alunos em suas casas. Como principais características desta aplicação destacam-se:

- o modo de visualização, que permite visualizar simultaneamente os ecrãs de todos os computadores numa pequena janela de pré-visualização;
- a visualização do ecrã do aluno no computador do professor;
- o modo de demonstração, onde o ecrã do professor é "enviado" para o computadores dos alunos, em tempo real em janela ou ecrã completo;

- o bloqueio do computador dos alunos;
- o envio de mensagens de texto aos alunos;
- a possibilidade de encerrar ou iniciar todos os computadores através da rede;
- a realização de *printscreens* para recolha de evidências;
- o controlo remoto do computador do aluno para ajuda ou apoio;
- a execução remota de *scripts*.

É importante definir, logo no início, regras claras e explicitar aos alunos qual a natureza e as finalidades da utilização do sistema. Um CMS usado de forma adequada permite, de forma muito fácil, criar e gerir um ambiente rico para aprendizagem onde a tecnologia proporcione situações em que o aluno se envolva ativamente nas tarefas e o faça de modo verdadeiramente colaborativo.

Num estudo empírico com a duração de dois semestres, realizado numa escola do ensino básico de uma comunidade de tamanho médio, no sudeste dos EUA, Joyce e Schmidl (2008) avaliaram o impacto da utilização apropriada de um CMS no desempenho dos alunos. Os resultados mostraram que o emprego adequado destas aplicações em salas ou laboratórios equipados com computadores pode levar a melhorias substanciais, não só nos resultados dos alunos mas também no seu comportamento e nas suas atitudes. Este facto adquire maior relevância no caso dos alunos mais novos. Os autores sugerem que o professor deve projetar apresentações, demonstrações, comunicar com os alunos através do CHAT e usar o sistema para manter os alunos centrados nas tarefas. Recomendam ainda, às instituições de ensino, a instalação deste tipo de software em todas as salas TIC.

CAPÍTULO II

Método

"Generalization can be an unconscious process."
(Stake, 1998)

> "Fala-se muito comummente da ambiguidade da noção de método; frequentemente, também se identifica método com metodologia e cada um destes, com técnicas de investigação. (...) O conteúdo de método é mais preciso. Instrumento estilizado direccionado, em última instância, à produção de conhecimento sobre o real, o método consiste, essencialmente, num conjunto de operações, situadas a diferentes níveis, que tem em vista a consecução de objectivos determinados. Corresponde a um corpo orientador da pesquisa que, obedecendo a um sistema de normas, torna possíveis a selecção e a articulação de técnicas, no intuito de se poder desenvolver o processo de investigação. O método consiste, por tudo isso, num plano orientador de trabalho." (Pardal & Lopes, 2011, p.12).

Ainda de acordo com estes autores, as decisões relacionadas com a seleção do método e das técnicas de recolha de informação mais adequadas à problemática - o contexto onde se desenvolve o trabalho empírico, a forma de tratar e apresentar os dados, a previsão do tempo necessário para preparação e implementação, com sucesso, desse trabalho, entre outras - são difíceis e de grande importância para o estudo, porque delas dependem o seu êxito, a sua qualidade e fiabilidade (idem).

Neste capítulo, serão apresentadas e justificadas as opções fundamentais que foram tomadas relativamente ao método de investigação adotado e às técnicas e instrumentos utilizados para a recolha e análise de dados. Serão, ainda, apresentados os critérios de selecção e a caracterização dos participantes neste estudo e discutidas as principais fases empíricas.

1. Opções Metodológicas

Este estudo, recorde-se, visa averiguar em que medida uma adequada utilização de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD's) mediadas por um Sistema de Gestão de (atividades) Sala de Aula (CMS) favorece o desenvolvimento de competências matemáticas transversais e específicas, nomeadamente da criatividade, no estudo das transformações geométricas no 2.º Ciclo do Ensino Básico. A natureza da investigação sugere a escolha de um método de natureza qualitativa, centrado num estudo de caso com uma certa dimensão exploratória, principalmente no que diz respeito à criatividade.

A ideia de investigação qualitativa é comum a todas as investigações que se baseiam, principalmente, na utilização de dados qualitativos (Gomez, Flores & Jiménez, 1999) que, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.16), se caracterizam por serem "ricos em fenómenos descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico".

De acordo com os mesmos autores (idem), uma investigação qualitativa caracteriza-se por conter cinco aspectos fundamentais:

(1) a fonte directa dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados;
(2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo;
(3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados;
(4) a análise dos dados é feita de forma indutiva;
(5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Foi o caso.

Segundo Fernandes (1991), o foco da investigação qualitativa reside na compreensão mais aprofundada dos problemas, investigando o que está por "trás" de certos comportamentos, atitudes e convicções e onde o investigador é o instrumento de recolha de dados por excelência.

Ainda segundo este autor, este tipo de investigação fornece informação acerca do ensino e da aprendizagem que, de outra forma, não se poderia obter. Nomeadamente através da observação detalhada e planeada e de interação estreita com o estudo dos processos cognitivos que se utilizam na resolução de situações problemáticas, podem identificar-se variáveis relevantes que não são facilmente detetadas através de métodos típicos de investigação quantitativa:

> "A preocupação essencial dos pesquisadores qualitativos é a compreensão dos fenómenos a partir da perspectiva dos participantes. Isso não os dispensa, entretanto, do esforço de procurar captar, com o máximo de fidelidade, o ponto de vista dos participantes, seja confirmando junto aos próprios informantes o acerto de suas percepções, seja confrontando-as com a de outros pesquisadores." (Godoy, 1995, p.63).

Para Coutinho (2011), o objetivo da investigação qualitativa é perceber os fenómenos na íntegra e no contexto em que estes sucedem, o que pode englobar "compreender, de forma aprofundada, o que os sujeitos pensam" Barbosa (2010, p.90). Para tal, é necessário que "o investigador passe períodos de tempo (…) com os sujeitos, no seu contexto natural, propondo questões de natureza aberta e garantindo o registo das suas respostas" (idem).

Contudo, a investigação qualitativa não está isenta de crítica. Aponta-se, nomeadamente a questão da objetividade na recolha e análise dos dados como uma limitação (Fernandes, 1991), já que é passível de ser determinada pela falta de experiência, conhecimento ou mesmo de "sensibilidade" por parte do investigador.

Dentro do paradigma construtivista ao qual se subordina o método qualitativo, foi escolhido o estudo de caso exploratório como estratégia de investigação, considerado o mais adequado quando se pretende conhecer o "como?" e o "porquê?", quando o investigador detém escasso ou nenhum controlo dos acontecimentos reais e quando o campo de investigação se circunscreve a um fenómeno natural dentro de um contexto da vida real (Yin, 1984).

Como este autor afirma (idem), esta abordagem adapta-se à investigação em educação quando o investigador é confrontado com situações complexas que dificultam a identificação das variáveis consideradas importantes, quando procura encontrar interações entre fatores relevantes próprios dessa entidade, quando o seu objetivo é a descrição ou a análise profunda e global do fenómeno e quando se pretende apreender a dinâmica do fenómeno, do programa ou do processo.

De acordo com Ponte (2006, p.2), um estudo de caso "É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse."

"(...) preservar e compreender o caso no seu todo e na sua unicidade" é, segundo Coutinho (2011, p.293), a sua finalidade e o traço mais característico e diferenciador é o facto de se tratar de um plano de investigação que envolve o estudo pormenorizado de uma entidade bem definida – o “caso” (Coutinho, 2011). A autora faz uma interpretação bastante abrangente do conceito de caso ao considerar que um indivíduo, um pequeno grupo, uma comunidade ou até um processo, uma política ou um acontecimento imprevisto, podem constituir "caso" (idem).

Os estudos de caso podem ser, segundo Bogdan e Biklen (1994), estudos de caso únicos ou estudos de caso múltiplos, de acordo com o número de casos a considerar e atendendo aos diferentes propósitos. Yin (2010) acrescenta ainda que, quer sejam únicos ou múltiplos, estes podem ser explanatórios, descritivos ou exploratórios. Se os estudos explanatórios procuram a causa que melhor explica o fenómeno estudado e todas as suas relações causais, os descritivos apresentam a descrição completa de um fenómeno inserido no seu contexto e os estudos de caso exploratórios têm como objetivo desenvolver hipóteses e proposições para investigação posterior (idem).

É então com naturalidade que se constata a sua utilização frequente no domínio da Educação Matemática (Ponte, 2006) e, segundo Coutinho e Chaves (2002, p.221), na Tecnologia Educativa.

O estudo que aqui se apresenta também toca a lógica da investigação-ação uma vez que o investigador foi o próprio professor da disciplina e segundo (Godoy, 1995, p.62), o pesquisador deve aprender a usar-se a si próprio como o "instrumento mais confiável de observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados".

Para além disto, também neste caso “a investigação-ação inicia-se tendo como base situações com as quais o professor está insatisfeito ou deseja melhorar” (Arends, 1995, p.527) e ainda se pretende recolher “informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais.” (Bogdan & Biklen, 1994, p.292).

Segundo Dick (1999) citado por Coutinho (2011),

> “A investigação-ação pode ser descrita como uma família de metodologias de investigação que incluem ação (ou mudança) e investigação (ou compreensão) ao mesmo tempo, utilizando um processo cíclico ou em espiral, que alterna entre ação e reflexão crítica. Nos ciclos posteriores, são aperfeiçoados, de modo contínuo, os métodos, os dados e a interpretação feita à luz da experiência (conhecimento) obtida no ciclo anterior.” (p.313).

Coutinho, Sousa, Dias, Bessa, Ferreira e Vieira (2009) referem que o que melhor a caracteriza e identifica é “o facto de se tratar de uma metodologia de pesquisa, essencialmente prática e aplicada, que se rege pela necessidade de resolver problemas reais” (p.362).

O presente trabalho foi, pois, orientado numa lógica próxima da investigação-ação que, na opinião de Ponte (1994), constituem trabalhos de intervenção em que as problemáticas e as decisões relativas ao desenvolvimento da investigação são fortemente partilhadas pelo investigador e os participantes, e que recorrem usualmente a metodologias qualitativas.

Devido a questões de ordem moral e profissional, apesar de não se ter desenvolvido uma investigação-ação na sua forma pura, no decurso do estudo, de sessão para sessão, foram sempre feitas correções e reformulações no sentido de acautelar um processo de aprendizagem, o mais eficazmente possível.

Assim, o processo cíclico descrito acima foi estruturado em micro ciclos capazes de responder ao interesse superior dos alunos.

2. Esquema de Investigação

Para uma visão global do estudo apresentam-se, na figura seguinte, de forma esquemática, as principais etapas da investigação e as respectivas técnicas e instrumentos de recolha de dados.

Fig. 14 - Esquema de investigação

3. Participantes no Estudo

Os participantes deste estudo frequentavam uma escola de um concelho do distrito de Aveiro cuja economia se baseia predominantemente na indústria e nas atividades ligadas à floresta e à agricultura. A população escolar é, pois, maioritariamente oriunda de famílias cujas atividades profissionais se centram na indústria, que complementam com a exploração de pequenas parcelas agrícolas em regime de subsistência familiar. As indústrias do Concelho abarcam, essencialmente, os ramos da metalurgia, da cerâmica e da fabricação de móveis. A maior parte dos encarregados de educação da comunidade escolar possuía habilitações até ao 9.º ano de escolaridade, registando-se alguns casos em que não ultrapassavam mesmo o 1.º Ciclo do Ensino Básico. Apenas um reduzido número de encarregados de educação possuía habilitações ao nível do Ensino Superior.

A escola tinha cerca de quinhentos alunos distribuídos por vinte e duas turmas, sendo que eram três do 1.º Ciclo, doze do 2.º Ciclo e cinco do 3.º Ciclo. Em termos de recursos tecnológicos, a escola possuía uma sala TIC, equipada com quinze estações de trabalho para os alunos e uma para o professor, esta com ligação a um quadro interativo. Todos os terminais se encontravam dispostos em rede. A utilização desta sala era passível de requisição. A Biblioteca e o Laboratório de Matemática possuíam quatro computadores cada e estavam disponíveis para utilização dos alunos e, mediante requisição e sob a supervisão de um professor, havia vinte computadores portáteis. Todos eles tinham instalado, entre outras aplicações, o GeoGebra, mas apenas a sala TIC dispunha de um CMS, neste caso o iTALC.

Nesta investigação, foram considerados como participantes o professor/investigador e três grupos de alunos de uma turma do 6.º ano de escolaridade, cujo desempenho foi objeto de análise em três estudos de caso e cujo número e composição se especificam mais adiante.

A participação no estudo dos alunos neste estudo foi devidamente negociada com os respectivos encarregados de educação através da Diretora de Turma, tendo-se solicitado o seu consentimento por escrito (anexo 01) e a devida autorização à Direção do Agrupamento de escolas (anexo 02). A generalidade dos encarregados de educação considerou a circunstância deste estudo como uma mais valia para os seus educandos. Por imperativo legais e éticos, conservou-se o anonimato dos participantes, atribuindo-se-lhes nomes fictícios, embora mantendo o respetivo género.

3.1. O Professor-Investigador

O professor detém uma licenciatura em Ensino Básico de Matemática e Ciências da Natureza, pela Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, desde 1998. Após a sua licenciatura, passou por várias escolas em diferentes pontos geográficos do país, onde lidou com diversas realidades escolares, tanto no 1.º Ciclo do Ensino Básico como no ensino da Matemática e das Ciências da Natureza no 2.º Ciclo. À data de realização deste estudo, contava com 13 anos de serviço no ensino público. Sendo professor do Quadro de Zona Pedagógica de Aveiro, lecionava Matemática ao 6.º ano numa escola deste distrito aquando da realização do estudo empírico. Durante a sua atividade profissional, desempenhou diversos cargos: Diretor de Turma, Diretor de Estabelecimento, Coordenador de Docentes com assento no Conselho Pedagógico, Representante dos professores na Assembleia de Escola, elemento do secretariado de exames e membro das equipas do Plano Tecnológico (PTE). Participou em projetos e frequentou variadas ações de formação no âmbito das Tecnologias de Informação, assim como o Programa de Formação Contínua em Matemática da Universidade de Aveiro m@c1, primeiro como formando (2007/2008) e depois como formador pela mesma universidade (2008/2011). É formador certificado em Didáticas Específicas pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua e dinamiza formações frequentes para professores no âmbito da Matemática e da Tecnologia.

Considerando a natureza do problema em estudo e o duplo papel de professor/investigador, procurou-se, apesar da necessária relação de empatia entre professor e aluno e o consequente clima de proximidade e confiança, não pôr em causa a clareza e o rigor metodológico da investigação ao longo da implementação deste estudo.

3.2. Caracterização da Turma

O estudo teve como base uma turma do 6.º ano de escolaridade de uma escola básica dos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico do distrito de Aveiro. A opção pelo 6.º ano de escolaridade deveu-se ao facto de o Programa de Matemática incluir, neste nível de ensino e na temática Geometria, um tópico sobre transformações geométricas, nomeadamente sobre isometrias e sobre o conceito de simetria.

Embora assente numa realidade económica, social e cultural deprimida, os alunos desta turma eram, no entanto, oriundos de agregados familiares com rendimentos médios ou elevados, provenientes, na sua generalidade, do setor dos serviços. Apesar do flagelo do desemprego, apenas um aluno beneficiava de apoio socioeconómico.

Era uma turma do ensino articulado cujos alunos frequentavam, no Conservatório, as disciplinas de Instrumento, Classe de Conjunto e Formação Musical.

À data da realização deste estudo, os alunos participantes tinham entre os 11 e os 12 anos de idade, nenhum apresentava qualquer retenção no seu percurso escolar e frequentavam o 6.º ano pela primeira vez. A maioria dos pais destes alunos era detentora de habilitações académicas entre o 9.º e o 12.º ano de escolaridade, existindo também alguns com habilitação académica de nível superior. Apenas dois não tinham completado o 9.º ano. Apesar das dificuldades reveladas a Matemática e do seu comportamento ser alvo de frequentes reparos, o Conselho de Turma considerava que o aproveitamento global da turma era bom. Para esta caracterização, utilizaram-se informações contidas no Projecto Curricular de Turma e recolheram-se dados através de um Questionário Inicial (anexo 03), cuja análise é a que se segue:

A turma era constituída por 26 alunos, 10 do sexo feminino e 16 do sexo masculino. A distribuição dos níveis obtidos a Matemática no ano letivo anterior à realização deste estudo pode observar-se na tabela seguinte:

Que nível obtiveste à disciplina no final do ano letivo anterior?				
nível 1	nível 2	nível 3	nível 4	nível 5
0	4	8	5	9

Tabela 1 – Distribuição dos níveis obtidos à disciplina no final do ano letivo anterior

Entre eles, 25 alunos afirmaram gostar de Matemática, sendo que apenas 1 deles respondeu o contrário.

Na tabela 2, pode verificar-se que a maioria dos alunos considerava ter um desempenho razoável, 6 muito bom, 3 fraco e 1 muito fraco. Esta perceção encontra-se bastante mais condizente com os resultados finais do primeiro período do que com os dados da tabela 1, (nível obtido no final do ano letivo anterior).

Consideras-te bom aluno a Matemática?			
muito bom	razoável	fraco	muito fraco
6	16	3	1

Tabela 2 – Autoavaliação do desempenho a Matemática

A totalidade dos alunos declarou possuir computador com ligação à Internet em casa e a maioria deles gostava ou gostava muito de utilizar o computador; apenas dois assinalaram gostar pouco, como se pode observar na tabela 3. Este resultado mostra que a utilização do computador pode ser uma estratégia com implicações motivacionais e de atitude importantes.

Gostas de utilizar o computador?			
gosto muito	gosto	gosto pouco	não gosto
20	4	2	0

Tabela 3 - Caracterização da turma quanto ao gosto pela utilização do computador

Relativamente ao nível de conhecimentos no âmbito da informática, os alunos referiram ter, na sua globalidade, um nível médio, facto que se confirmou posteriormente no teste de competências tecnológicas (ver tabela seguinte).

Consideras que o teu conhecimento a nível de informática é:			
elevado	médio	Fraco	nulo
2	22	2	0

Tabela 4 - Caracterização da turma quanto ao conhecimento que pensa ter ao nível da informática

No que respeita ao local e à frequência de utilização do computador, verificou-se uma quase inexistente utilização na escola, o que não deixa de ser curioso depois de todo o investimento realizado nesta área nos últimos anos. Como se pode observar, os dados indicam um uso maioritário em casa numa frequência que varia entre o diário e o semanal (ver tabela seguinte).

Onde e com que frequência costumas utilizar o computador?				
	diariamente	semanalmente	raramente	nunca
Em casa	8	12	5	1
Em casa de familiares	2	2	15	7
Na escola	0	1	13	12
Noutro local	0	1	9	0

Tabela 5 - Caracterização da turma quanto ao local e frequência de utilização do computador

Pela análise da tabela 6, verificou-se uma utilização preferencial do computador como ferramenta de comunicação e como instrumento lúdico. A sua utilização como ferramenta de trabalho ficou relegada para depois destas duas vertentes e em valores significativamente mais baixos.

Com que fins utilizas o computador?				
	sempre	quase sempre	raramente	nunca
Como ferramenta de estudo	2	8	16	0
Como meio de comunicação	8	13	3	2
Como instrumento lúdico	5	9	10	2
Com outra finalidade	3	4	5	14

Tabela 6 - Caracterização da turma quanto ao fim para que utiliza o computador

Quando questionados sobre a sua capacidade de lidar com ficheiros informáticos, a quase totalidade dos alunos afirmou ser capaz de o fazer quando estes se encontram no computador ou numa *pendrive* revelando, no entanto, algum desconhecimento quando se tratava de trabalhar com o suporte CD-ROM (ver tabela seguinte).

Sabes abrir um ficheiro que esteja guardado?		
	sim	não
Numa pasta do computador	26	0
Numa *pendrive*	24	2
Num CD-ROM	19	7

Tabela 7 - Caracterização da turma quanto à capacidade de abrir ficheiros informáticos

À pergunta sobre a importância do uso de computadores para o ensino e aprendizagem, a grande maioria dos alunos considerou o uso de computadores importante, como pode verificar-se na tabela 8.

Consideras que o uso de computadores para ensinar e aprender é:			
muito importante	importante	pouco importante	nada importante
1	23	2	0

Tabela 8- Caracterização da turma quanto à importância atribuída ao computador para o ensino e para a aprendizagem

Acerca da Geometria, os dados contidos nas tabelas 9 e 10 revelaram que os alunos apreciavam esta área e consideravam-na importante.

Gostas de Geometria?			
gosto muito	gosto	gosto pouco	não gosto
3	17	6	0

Tabela 9 - Caracterização da turma quanto ao gosto pela Geometria

Consideras a Geometria importante?			
muito importante	importante	pouco importante	nada importante
6	16	4	0

Tabela 10 - Caracterização da turma quanto à opinião sobre o grau de importância da Geometria

À questão sobre se gostaram das aulas de Geometria em anos anteriores e porquê, 11 alunos responderam que não, tendo os restantes 15 respondido que sim.

Os motivos assinalados para o facto de não terem gostado foram os seguintes: *"…a matéria era só sólidos geométricos"; "…era tudo muito confuso"; "…os professores não eram explícitos"; "…gostaria de ter trabalhado no computador."*

As justificações para uma apreciação positiva foram: *"…gosto da matéria"; "A matéria não era chata"; "A matéria era divertida"; "…gosto de construir objetos"; "…havia novos materiais e instrumentos"; "A matéria não era difícil".*

Quando questionados sobre a sua experiência prévia com *software* de geometria dinâmica, 20 alunos disseram conhecer o GeoGebra mas também acrescentaram que nunca tinham trabalhado com ele ou com qualquer outra aplicação.

No que diz respeito às representações dos alunos acerca da criatividade em Matemática, 24 consideraram ser possível ser criativo em Matemática ensaiando as seguintes justificações*: "…é possível criar novas figuras"; "…inventar coisas diferentes"; "…resolver problemas de várias formas"; "…há muito para descobrir"; "…dá para construir figuras magníficas"; "…dá para construir como os arquitectos"; "…há liberdade"; "…há mil formas de fazer as coisas"; "…pode-se inventar problemas".*

Os dois alunos que argumentam o contrário declararam que a criatividade em Matemática não era possível porque *"tudo já está inventado para poder dar certo".*

Os alunos consideraram que para se ser criativo é necessário*: "ser original"; "criar coisas novas"; "fazer Matemática no dia-a-dia"; "ter imaginação"; "ser mais colorido"; "fazer as coisas de maneira diferente"; "ser sonhador"; "ter arte para fazer alguma coisa"; "que seja do agrado dos outros"; "inventar coisas sozinho"; "não copiar"; "criar algo novo e inesperado"; "dar largas à imaginação"; "ter ideias férteis"*. A maioria das respostas comuns incidiu no aspecto da originalidade e na criação/invenção de coisas novas.

Sobre as áreas em que os alunos acharam ser possível ser criativo, surgiram essencialmente as artes, a moda e a escrita, mas também se constataram bastantes referências à Matemática em geral e à Geometria em particular (ver tabela 12). Reporta-se aqui, de seguida, três transcrições que, pelo seu significado, me parece importante ressaltar:

-"Ser criativo é pensar em alguma coisa e desenhá-la sem medo de que alguém goze";

-"Ser criativo é criar qualquer coisa que não existe de coisas que existem";

-"Ser criativo é inventar coisas divertidas e complicadas".

Nas próximas duas tabelas pode observar-se as conceções mais frequentes sobre o significado de criatividade e sobre as áreas em que esta pode ocorrer. Não deixa de ser curioso verificar o número de vezes em que a Matemática foi citada como área com potencial criativo para o indivíduo.

	frequência absoluta
Ter imaginação	7
Criar coisas novas	10
Fazer coisas diferentes/originais	8
Ter colorido	5

Tabela 11 - Conceções mais frequentes sobre o significado de criatividade

	frequência absoluta
Artes (teatro, música, cinema, pintura, ...)	18
Moda	15
EVT	15
Escrita	14
Matemática	13
Geometria	9
Tudo	6

Tabela 12 - Conceções mais frequentes sobre as áreas onde se pode ser criativo

A tabela seguinte mostra o grau de concordância dos alunos da turma no âmbito das suas representações acerca da criatividade:

	concordo fortemente	concordo	discordo	nunca	sem opinião
Eu considero-me criativo.	4	21	1	0	0
A criatividade é um dom raro que só algumas pessoas possuem.	1	3	20	2	0
A criatividade varia consoante a idade.	2	6	13	4	1
A criatividade é uma característica individual	2	12	8	1	3
A criatividade pode ser desenvolvida na maioria das pessoas se lhe for dada essa possibilidade	8	13	5	0	0

A criatividade é uma capacidade fundamental	7	13	5	0	1
A escola limita a criatividade dos alunos	1	7	14	3	1
É possível avaliar a criatividade dos alunos	8	10	3	2	3
Em Matemática está tudo criado, não se cria nada de novo.	1	4	16	3	2
A Matemática é uma disciplina criativa como a Música e outras artes.	9	13	4	0	0
Em Matemática não se pode ser muito criativo, é "aquilo e aquilo mesmo".	1	3	18	2	2
Aulas de Matemática criativas são essenciais para melhorar as aprendizagens dos alunos	13	11	1	0	1

Tabela 13 - Representações acerca da criatividade

Por último, sistematizam-se os dados recolhidos relativos à questão colocada aos alunos sobre como gostavam mais de trabalhar dentro da sala de aula. Como se pode verificar, a maioria dos inquiridos (14 no total de 26) prefere trabalhar em pequeno grupo, para além de gostarem também de o fazer em pares (11). Apenas um aluno respondeu que gostava de trabalhar sozinho.

Como gostas mais de trabalhar dentro da sala de aula?			
Grupo turma	Pequeno grupo	Pares	Sozinho
0	14	11	1

Tabela 14 - Caracterização da turma quanto às preferências sobre modos de trabalho na sala de aula

Os alunos que preferiam trabalhar em pequeno grupo ou em pares justificaram dizendo que podiam: *"…discutir as várias soluções ou hipóteses"; "…ajudar-se uns aos outros"; "…debater ideias"; "…pensar melhor"; "…comunicar melhor".*

Relativamente ao facto de gostar de trabalhar sozinho, este aluno afirmou que *"…se concentra melhor".*

Para alguns, o trabalho em pares é mais benéfico porque *"aprendem mais"* e *"o trabalho é mais organizado".*

Com a intenção de aferir melhor o grau de proficiência dos alunos no contexto tecnológico e confirmar os dados do Questionário Inicial sobre a utilização de computadores, foi também realizado um teste de competências tecnológicas de carácter prático (anexo 04) cujos resultados serviram como referente ao desenho posterior da sequência de tarefas que foi implementada.

O teste continha um pequeno exercício final de autoavaliação sobre o desempenho dos alunos na resolução das tarefas. Assim, na primeira tarefa, solicitou-se aos alunos que ligassem o computador, abrissem a aplicação GeoGebra e desenhassem e manipulassem de forma livre diferentes objetos geométricos (pontos, rectas, segmentos de recta, polígonos,...), o que a maioria fez sem dificuldade (ver tabela seguinte). Foi-lhes ainda pedido que alterassem as propriedades (cor, estilo do traço,...) destes objetos e que gravassem o trabalho no ambiente de trabalho do computador, que a maioria também consegui fazer autonomamente.

Tarefa I	fizeram	fizeram com dificuldade	fizeram com ajuda	não fizeram
Ligar o computador e iniciar o GeoGebra	24	2	0	0
Desenhar livremente diferentes objetos geométricos e alterar as suas propriedades	21	2	1	2
Gravar o trabalho no ambiente de trabalho	19	3	2	2

Tabela 15 - Grau de consecução da tarefa I

A segunda tarefa começava por pedir aos alunos que limpassem a área de trabalho no GeoGebra e construíssem uma representação de um automóvel e alterassem também as suas propriedades. Em seguida, solicitou-se-lhes que construíssem um retângulo (polígono) ao lado do veículo e que procurassem, no computador ou na Internet, uma imagem e a inserissem nesse retângulo. Finalmente, foi-lhes pedido que gravassem o trabalho, com um nome diferente do primeiro, no ambiente de trabalho. Também esta tarefa foi realizada com sucesso pela maioria dos alunos (ver tabela seguinte).

Tarefa II	fizeram	fizeram com dificuldade	fizeram com ajuda	não fizeram
Limpar a área de trabalho	19	4	1	2
Construir livremente a representação de um automóvel e alterar as suas propriedades	19	3	2	2
Construir um retângulo (polígono) com uma dada dimensão	15	4	4	3
Pesquisar uma imagem e inseri-la no na área de trabalho do GeoGebra	19	2	3	2
Gravar o trabalho no ambiente de trabalho	19	3	2	2

Tabela 16 - Grau de consecução da tarefa II

Na terceira e última tarefa pediu-se aos alunos que copiassem os ficheiros anteriores para uma pasta a criar com o seu nome, também no ambiente de trabalho e, posteriormente, a gravassem numa *pendrive* ligada externamente ao computador por USB. Para terminar, solicitava-se que a comprimissem a referida pasta e, a enviassem por correio electrónico para o professor. Alguns alunos não o conseguiram, ou compactar a pasta ou enviá-la por e-mail (ver tabela seguinte).

Tarefa III	Fizeram	fizeram com dificuldade	fizeram com ajuda	não fizeram
Criar uma pasta, copiar os ficheiros e gravar a pasta numa *flash drive*	15	3	1	7
Comprimir a pasta e enviá-la por e-mail	8	1	2	15

Tabela 17 - Grau de consecução da tarefa III

A análise destes dados confirmou que a maioria dos alunos apresentava um domínio efetivo de competências básicas na utilização de computadores. Conceitos como abrir, gravar, gravar como, ficheiro ou pasta faziam parte do seu quotidiano; também as operações com o manejo do rato e do teclado não constituíram dificuldades significativas. Constatou-se também que, apesar de ter sido o primeiro contato com o GeoGebra para a generalidade dos alunos, a sua utilização revelou-se intuitiva e amigável. As maiores dificuldades reportaram-se à compressão de ficheiros e pastas e posterior envio por correio electrónico.

3.3. A Seleção dos Casos

Yin, (1994, p.243) citando Stake, refere que a seleção de pessoas, grupos ou lugares que vão constituir o "caso" é o "passo mais crítico da pesquisa por estudo de caso". O autor refere também que a ideia de que um estudo de caso deve obedecer a uma "amostra" de um universo é falsa pois considera que o que está em causa é não uma generalização estatística mas uma generalização analítica, acrescentando que "Ao fazer um estudo singular de caso, pode escolher-se um caso extremo ou único, ou mesmo um caso revelatório (...) e pode até pensar-se em estudá-lo desde o começo".

Contudo, Stake (2007) refere que entender o carácter singular de um caso implica também o conhecimento de outros diferentes pelo que a selecção de "casos que são típicos ou representativos de outros casos (...)" (p.20) também pode ser útil, admitindo também que uma amostra tão limitada não seria, provavelmente, representativa (idem), o que não constitui problema. De facto, pretende-se particularizar, não generalizar e a selecção do caso faz-se pela intenção de compreender o próprio caso (Stake, 2007).

Ao pretender estudar-se o caso típico, o caso crítico, ou o caso longitudinal, podem apresentar-se diversos candidatos adequados e terá de ser feita, então, uma seleção de entre eles.

Neste estudo, procurou definir-se um número de casos que, atendendo aos objetivos descritos, se pudesse estabelecer como base de trabalho a que o investigador conseguisse dar resposta atendendo às limitações temporais com que se confrontava. Da necessidade de se obter informação relevante a respeito das questões de investigação, foram estabelecidos estes critérios: os alunos deveriam apresentar, à partida, um aproveitamento escolar diferente, revelar inicialmente atitudes e expectativas diferentes face à Matemática (casos contrastantes) e teriam que ter estado presentes em todos os momentos da aplicação da sequência didática idealizada. Yin (2005) também sublinha que, num estudo de caso múltiplo, é importante verificar quais os lugares ou pessoas que proporcionarão melhor riqueza de dados e melhor cruzamento de casos tendo em conta a "lógica do inquérito".

Assim sendo, a seleção foi determinada pelas respostas dos alunos ao Inquérito Inicial por questionário, pelas produções dos alunos - quer na resolução das tarefas quer nos testes - e pelas respostas ao Inquérito Final por questionário.

Nas sessões do estudo empírico, optou-se pela metodologia de trabalho de grupo. Condicionantes de espaços e recursos informáticos pesaram também nesta escolha. Optou-se, assim, pela seleção de três "grupos" de alunos que, à data da realização do estudo, tinham onze anos de idade e não apresentavam retenções no ciclo de escolaridade. A turma foi dividida, pelo professor, em onze pares de alunos e um trio tendo uma aluna permanecido sozinha pois considerava que o trabalho de grupo lhe era prejudicial ao impedi-la, frequentemente, de se focar nas tarefas. A constituição do grupo de três alunos adveio do facto de mais nenhum aluno partilhar da ideia desta aluna o que, consequentemente, ditou a sua existência.

Após uma ponderação cuidada, esta escolha recaiu na análise de três casos: dois pares de alunos e a aluna que ficou sozinha. Os grupos serão designados neste estudo por G1 (grupo 1), G2 (grupo 2) e G3 (grupo 3). Assim o grupo G1 foi constituído por um único elemento do sexo feminino, designado por Catarina; o G2 por um elemento do sexo masculino e outro do sexo feminino, designados por Tiago e Luísa e o grupo G3, constituído com dois elementos do sexo feminino, neste estudo designados por Gabriela e Francisca (ver quadro seguinte).

Grupo G1	Grupo G2	Grupo G3
Catarina	Tiago	Francisca
---	Luísa	Gabriela

Quadro 1 - Os casos de estudo

O grupo G1 era um "grupo" unipessoal, composto por uma aluna cujo rendimento a Matemática pode ser classificado como extraordinário. A aluna, apesar de não apreciar o trabalho de grupo, levantava-se espontaneamente do lugar para ajudar os colegas. Era, invariavelmente, a primeira a acabar as tarefas.

Os alunos Tiago e Luísa (G2) apresentavam desempenhos a Matemática que variavam entre o insatisfatório e o pouco satisfatório e, embora se esforçassem e empenhassem consideravelmente, não eram muito participativos. Luísa aparecia com resultados escolares algo superiores aos do seu colega de grupo.

O grupo G3 foi constituído por duas alunas com um perfil muito semelhante. Ambas apresentavam um bom desempenho a Matemática, sendo esforçadas e empenhadas. Gabriela era algo mais consistente do que Francisca, embora esta última evidenciasse uma maior evolução ao longo do ano. A Gabriela era bastante participativa, o que não acontecia com a Francisca. Ambas eram muito formais na sala de aula e, de algum modo, representavam uma parte significativa dos alunos da turma.

4. Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados

Segundo Pardal e Correia (1995) "(...) as técnicas são um instrumento de trabalho que viabiliza a realização de uma pesquisa, um modo de se conseguir a efetivação do conjunto de operações em que consiste o método, com vista a verificação empírica (...) "(p.48).

Yin (1993, 2005) destaca a importância da recolha de informação a partir da análise de documentos que possam estar disponíveis sendo que esta pesquisa, no caso deste estudo, recorreu normalmente a técnicas e instrumentos próprios de investigação qualitativa como as notas de campo, o diário de bordo e a observação participante.

Se a natureza da questão define as técnicas e os instrumentos a utilizar (Tuckman, 2005), a metodologia seguida foi baseada na recolha de dados qualitativos, a fim de se poder descrever e interpretar o fenómeno em estudo da forma mais autêntica e completa possível.

A vantagem mais evidente na utilização de múltiplas fontes de evidência foi o desenvolvimento de linhas convergentes de investigação, enquanto processo de triangulação de dados. "Assim, qualquer descoberta ou conclusão em um estudo de caso provavelmente será muito mais convincente e acurada se baseada em várias fontes distintas de informação, obedecendo a um estilo corroborativo de pesquisa." (Yin, 2005, p.126).

Em metodologia qualitativa e de estudos de caso, a questão da triangulação revela-se como um aspecto de grande importância. Autores como Yin (1993), Hamel (1997) e Stake (1994, 1999) apresentam-na como uma estratégia de validação, na medida em que torna possível a combinação de metodologias para estudo do mesmo fenómeno, aumentando a fiabilidade da informação e dos resultados.

Os dados aqui trabalhados, devido à natureza qualitativa do estudo, foram recolhidos através das técnicas de análise documental, inquirição na sua forma de questionário, e observação direta.

Para a análise documental, os principais instrumentos utilizados foram o Projecto Curricular de Turma, o Projecto Educativo e Curricular do Agrupamento, o Plano TIC, os Registos Biográficos dos alunos, o Currículo de Matemática, o Programa de Matemática, as Metas de Aprendizagem e as produções dos alunos.

Relativamente à técnica de inquirição, utilizaram-se dois questionários: um inicial, na preparação do estudo, e outro no seu termo.

No que respeita à observação direta, os instrumentos a utilizar foram as notas de campo e o Diário de Bordo.

Segue-se uma descrição breve das diferentes técnicas e instrumentos utilizados na recolha dos dados cuja principal finalidade era permitir o cruzamento da informação para a validação dos resultados obtidos.

4.1. Observação

Yin (2005) estabelece precisamente que o estudo de caso leva a fazer “observação directa e a coligir dados em ambientes naturais”, o que é diferente de confiar em “dados derivados” (p.381). Daqui emerge, naturalmente, a questão da observação não participante/participante. Rodríguez et al. (1999), admitindo a sua frequente utilização, consideram que a observação participante é um método interativo de recolha de informação que requer uma implicação do investigador nos acontecimentos e fenómenos que está a observar. Neste caso, ocorre a integração do investigador no campo de observação, focalizando o fenómeno desde a perspectiva de um membro participante, o que pode influenciar aquilo que observa (Flick, 2004). Yin (2005) considera a observação participante como um modo especial de observação, onde o investigador não se limita a um registo passivo, podendo assumir outros papéis participando nos acontecimentos a serem estudados.

Autores como Bogdan e Biklen (1994) ou Lessard-Hébert et al. (2008) defendem que a participação do investigador não é absoluta, e que pode, isso sim, ocorrer com diferentes graus de implicação na mesma investigação. Estas variações, resultantes de necessidades e circunstâncias diversas, conduzem a uma participação mais ativa em alguns momentos e mais passiva noutros. A importância da observação participante é salientada por Yin (2005) quando defende que pode não existir outro modo de recolher informação e encara-a como uma oportunidade de percecionar a realidade a partir de "dentro".

Nesta perspetiva, Rodríguez et al. (1999) acentuam que:

> “Não obstante o esforço investido, será suficientemente compensado com a qualidade da informação obtida através deste procedimento. O observador participante pode aproximar-se num sentido mais profundo e fundamental às pessoas e comunidades estudadas e aos problemas que as preocupam. Esta aproximação que situa o investigador no papel dos participantes, permite obter percepções da realidade estudada que dificilmente se poderiam conseguir sem se implicar de maneira efectiva." (p.p.165-166).

4.1.1. Notas de Campo e Diário de Bordo

Bogdan e Biklen (1994) referem que as notas de campo são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha” (p.150) e, quando “detalhadas, precisas e extensivas” (idem), contribuem para o sucesso de uma investigação qualitativa.

Representando o Diário de Bordo uma importante fonte de dados, cujo objetivo é constituir-se um instrumento no qual o investigador vai desenvolvendo as suas notas, segundo Bogdan e Biklen (1994), “ajuda o investigador a acompanhar o desenvolvimento do projecto, a visualizar como é que o plano de investigação foi afectado pelos dados recolhidos, e a tornar-se consciente de como ele ou ela foram influenciados pelos dados” (p.151).

Segundo Ponte (2002, p.14), constitui o instrumento privilegiado “onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo”.

Neste sentido, as observações efetuadas no contexto deste estudo incidiram, essencialmente, nos momentos de aplicação das tarefas da sequência didáctica e nos momentos de avaliação. Neste sentido, foram tiradas notas consideradas relevantes à implementação da própria sequência didática, às atitudes dos alunos no desenvolvimento das tarefas, a momentos onde os alunos revelavam mais dificuldades e a episódios relevantes ocorridos durante as aulas. Tais notas foram, quase imediatamente (normalmente no final do bloco de aulas), refinadas e desenvolvidas em forma de Diário de Bordo que se constituiu, posteriormente, como uma importante fonte de dados. Assim, o investigador registou, de forma sistemática, sobre cada sessão, informações descritivas e reflexivas, acerca de episódios significantes, sobre dificuldades experienciadas na resolução das tarefas, sobre o discurso dos alunos, bem como sobre decisões de caráter metodológico e ou didático que se tomaram ao longo de todo o processo. De facto, no Diário de Bordo, tornou-se uma prática, o investigador registar também previamente a cada aula, os objetivos específicos de cada tarefa, a forma como o trabalho seria organizado, os tempos previstos e a antevisão sobre as direções possíveis para que poderia evoluir cada sessão.

4.2. Inquirição

Como forma de recolha de informação foi também utilizada a inquirição por questionário, tendo-se construído um Questionário Inicial e um Questionário Final, ambos validados por dois juízes – um professor do ensino superior, doutorado em Didática e uma mestre em Gestão Curricular e professora do 1º CEB durante 30 anos - e cujos comentários foram incluídos na versão final dos mesmos. Numa primeira fase, o Questionário Inicial visou uma aproximação às características do público-alvo, nomeadamente aos gostos, hábitos, conhecimentos de utilização do computador e às suas atitudes relativamente à Matemática em geral e à Geometria em particular. Pretendeu-se, igualmente, recolher informações sobre representações acerca da criatividade e a sua relação com o ensino e aprendizagem da Matemática.

Com Questionário Final, implementado no termo do estudo empírico, pretendeu-se conhecer, entre outros aspectos que serão alvo de uma descrição mais detalhada ao longo deste ponto, as opiniões dos alunos face ao estudo realizado.

As questões destes instrumentos foram elaboradas tendo em conta as características da turma a que se destinavam. Procurou adaptar-se esta ferramenta ao nível de escolaridade dos inquiridos.

Utilizando a classificação de Pardal e Correia (1995) acerca das questões a apresentar neste tipo de questionários, estes apresentam:

- Perguntas abertas, possibilitando-se a total liberdade de resposta do inquirido;
- Perguntas fechadas do tipo dicotómico, com respostas de "sim" ou "não";
- Perguntas de escolha múltipla em leque aberto, oferecendo várias possibilidades de resposta dentro de um leque variado de opções, incluindo também a possibilidade de acrescentar novos itens;
- Perguntas de escolha múltipla de avaliação, oferecendo um conjunto de opções e procurando captar os diversos graus de intensidade de resposta face a um determinado assunto.

4.2.1. Questionário Inicial

O Questionário Inicial (anexo 03) foi o primeiro instrumento a ser utilizado.

Este instrumento, dividido em sete partes distintas, visou caracterizar a turma relativamente à "identificação", ao “percurso escolar", ao “uso do computador", à "Geometria", a "Ambientes (Dinâmicos) de Geometria Dinâmica" e às "representações acerca da criatividade em Matemática":

- Na primeira parte inquiria-se os alunos acerca da idade, do sexo e da localidade onde habitavam (questões 1 a 4);
- A segunda parte integra duas questões relativas ao percurso académico dos alunos para averiguar se estes gostavam de Matemática e se se consideravam bons alunos a esta disciplina;
- Com a terceira parte, composta por oito questões, pretendia obter-se informações relativas ao nível de conhecimento dos alunos sobre procedimentos básicos no uso de computador, se o possuíam e se estava ligado à Internet, onde e com que frequência o utilizavam e qual o nível de apreço que sentiam por esta ferramenta. As restantes questões visavam conhecer com que fins utilizavam o computador e como viam o seu conhecimento ao nível de informática;
- Na quarta parte, constam duas perguntas sobre Geometria – se gostavam ou não de Geometria e qual a importância que lhe atribuíam;
- Uma única questão configura a quinta parte deste questionário. Esta visava saber se os alunos já tinham tido algum contacto com softwares de geometria dinâmica;

- Na sexta parte recolheu-se informação acerca das representações que os alunos têm da criatividade, que importância lhe atribuem no processo educativo e qual o papel que desempenha na área da Matemática. Foi-lhes oferecida a possibilidade de justificarem as suas escolhas;
- Finalmente, na sétima e última parte deste questionário, quis-se conhecer as preferências dos alunos sobre a forma de trabalhar em sala de aula.

4.2.2. Questionário Final

Com o Questionário Final (anexo 13) procurou recolher-se a opinião dos alunos acerca da forma como tinham compreendido a abordagem do Tópico "Reflexão, rotação e translação" e do processo de aplicação da sequência didática, bem como da evolução do seu conceito de criatividade e possíveis alterações da sua atitude face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular. Este instrumento estrutura-se em cinco partes: a primeira com a identificação dos alunos, a segunda sobre as ferramentas utilizadas, com particular incidência no GeoGebra e no iTALC; a terceira acerca da criatividade; a quarta com enfoque nas transformações geométricas e na forma de trabalho e, finalmente, uma quinta parte centrada nas atitudes acerca da Matemática, em geral, e da Geometria em particular.

Concretizando, na primeira secção os alunos colocaram apenas o nome.

Na segunda, foi disponibilizada uma tabela onde manifestavam o grau de concordância com dez afirmações sobre a natureza e utilidade das ferramentas utilizadas, desde as tradicionais até às informáticas, o GeoGebra e o iTALC.

Procedeu-se de modo análogo na terceira secção deste questionário com uma tabela de doze questões, através das quais se pretendia aferir o grau de concordância dos alunos sobre a temática da criatividade.

Na quarta secção pretendeu perceber-se o sentir dos alunos relativamente ao conhecimento adquirido ao nível das transformações geométricas, sendo também ela constituída por cinco afirmações para as quais se solicitava o seu grau de concordância.

Na quinta e última secção, relacionada com a atitude, colocaram-se, de forma análoga à secção anterior, uma série de seis afirmações que apelavam à manifestação do grau de concordância.

4.3. Análise Documental

A análise documental centrou-se na resolução dos testes aplicados aos alunos, em documentos curriculares, em documentação formal/institucional relativa à escola onde o estudo foi realizado e produtos resultantes do próprio envolvimento dos alunos nas tarefas, durante as quais se efetuaram inúmeros *printscreens* das resoluções que ocorriam nas diferentes estações de trabalho. Este processo tornou-se enormemente facilitado pela utilização do CMS iTALC, pois esta aplicação permite a monitorização e o controlo em tempo real de todos os terminais utilizados pelos alunos.

Foi também realizado um pequeno teste prático de competências tecnológicas para confirmar as informações extraídas do questionário inicial sobre os conhecimentos acerca do computador.

4.3.1. Testes

No âmbito deste estudo, foram construídos e aplicados dois testes - um de competências tecnológicas e outro para aferir conhecimentos e capacidades matemáticas.

O teste de competências tecnológicas (anexo 04), cujas tarefas já foram descritas, foi estruturado para complementar as informações relativas ao uso do computador pelos alunos, extraídas do Questionário Inicial. De caráter prático, foi concebido para realização individual num período de quarenta e cinco minutos.

O teste de avaliação (anexo 05), elaborado segundo os objetivos definidos no currículo e no Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte et al., 2007), para o 6.º ano de escolaridade, estava, também, em sintonia com os objetivos deste estudo. Este instrumento foi pensado de forma a ser coerente com a abordagem didática utilizada para o Tópico "Reflexão, rotação e translação" com recurso a ADGD. Não fazendo sentido uma abordagem estritamente tradicional, o teste, de realização individual, continha questões de natureza mais teórica que apelavam ao uso de ferramentas ditas “tradicionais” como réguas, transferidores, papel e lápis, e outras para resolver com recurso ao GeoGebra. Foi igualmente pensado para ser resolvido em noventa minutos. Neste contexto, o teste apresentava dez questões (propostas de trabalho), sendo que as primeiras três estavam mais orientadas para os conteúdos programáticos relacionados com as isometrias, três outras sobre composição de isometrias, uma sobre frisos, duas de abordagem mais livre e centradas na criatividade e uma última mais focada no conceito de simetria.

Assim, a primeira questão visou aferir os conhecimentos que os alunos possuíam do conceito de reflexão solicitando que descobrissem e traçassem o eixo de reflexão de duas figuras de um conjunto com apenas uma solução correta.

Na segunda questão, centrada no conceito de translação, solicitou-se aos alunos que descobrissem e representassem, para cada translação apresentada, o respetivo vetor aplicado.

Na terceira questão, pediu-se aos alunos que caracterizassem uma rotação que transformava uma dada figura noutra, estando as duas inscritas numa circunferência.

A quarta questão pedia aos alunos que identificassem e descrevessem uma composição de isometrias que permitisse obter uma figura a partir de outra. Esta proposta admitia várias respostas.

A quinta tarefa solicitava aos alunos que identificassem e caracterizassem: uma reflexão, na alínea 5.1; uma translação, na alínea 5.2 e uma reflexão deslizante na alínea 5.3.

A proposta número seis convidava os alunos a criarem, livremente, um conjunto de isometrias e a efetuar o "movimento" de uma figura para uma posição predeterminada. Nesta fase, foi solicitado aos alunos que reproduzissem essas transformações com recurso ao GeoGebra, mas que registassem, em papel, os procedimentos efetuados.

Na questão número sete, pediu-se aos alunos que descrevessem duas formas diferentes de obter um friso representado.

A proposta número oito, deliberadamente mais orientada para a criatividade, foi formulada numa tentativa de dar espaço e liberdade aos alunos no sentido de lhes permitir criar livremente uma "composição" de figuras geométricas utilizando isometrias.

Com a questão número nove, pretendeu-se perceber os processos utilizados no trabalho criativo dos alunos e, no sentido de reforçar a capacidade de comunicação matemática, solicitou-se que descrevessem os procedimentos utilizados na criação anterior.

Finalmente, a proposta número dez desafiava os alunos a que, no GeoGebra, estudassem e caracterizassem as simetrias de um "cristal de gelo".

As tarefas propostas neste instrumento tiveram por base o trabalho realizado no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Universidade de Aveiro - m@c1/2, tendo, muitas delas, sido experimentadas e aplicadas no decurso do trabalho desta formação.

Este teste foi realizado nas modalidades pré e pós-teste.

4.3.2. Documentação Formal

Para a caracterização do meio, da escola e da turma onde decorreu o estudo, foram analisados documentos de natureza mais formal, nomeadamente o Projeto Educativo do Agrupamento, o Projeto Curricular do Agrupamento, o seu Plano Tecnológico para a Educação e o Projeto Curricular da Turma.

Como apoio à efetivação e implementação da sequência didática, foram consultados também o Currículo de Matemática e o Programa de Matemática para o Ensino Básico e as Metas de Aprendizagem.

4.3.3. Documentos e Artefatos Produzidos pelos Alunos

Durante esta investigação, os alunos resolveram diversas tarefas, algumas utilizando o papel e lápis e outras utilizando o computador e o software GeoGebra. Todos os trabalhos realizados, quer em suporte de papel quer através de ficheiros digitais, foram recolhidos e organizados. Foram também recolhidos inúmeros *printscreens* das resoluções e soluções das tarefas propostas encontradas pelos alunos em cada computador, o que veio a constituir-se numa valiosa fonte de informação pela sua diversidade e volume.

5. Descrição do Estudo

O estudo empírico foi implementado, como já foi visto, numa turma do sexto ano do ensino articulado, numa escola do distrito de Aveiro e no ano letivo de 2011/2012. Desenrolou-se em duas fases distintas. A primeira, que decorreu ao longo dos dois primeiros períodos escolares, foi dedicada a recolher informação e à preparação da sequência didática a implementar. A segunda fase correspondeu à implementação, propriamente dita, dessa sequência e decorreu no terceiro período escolar.

No sentido de se perceber claramente como decorreu o processo descrevem-se, em seguida e em detalhe, as etapas e atividades desenvolvidas assim como as tarefas que foram concebidas.

5.1. Etapas e Procedimentos

Num primeiro momento e após autorização da Direção do Agrupamento e dos Encarregados de Educação (ver nos anexos 01 e 02), deu-se início à primeira etapa que consistiu na caracterização do meio, do agrupamento de escolas e dos alunos da turma onde o estudo se realizou através da análise de documentação formal, como o Projeto Educativo e Curricular do Agrupamento, o Plano TIC, o Projeto Curricular de Turma e os Registos Biográficos.

É importante referir que os encarregados de educação foram informados que os dados recolhidos seriam usados apenas para efeitos de investigação e que não seriam divulgados, por qualquer meio, nem os nomes dos alunos participantes nem a identificação da escola garantindo-se, assim, o seu anonimato.

Ao longo desses primeiros meses, o investigador foi recolhendo informação e aumentando o seu grau de conhecimento dos alunos pois, pela primeira vez, era seu professor e não tinha lecionado qualquer outra disciplina a essa turma no ano letivo anterior.

Nesta fase, foi criado, validado e aplicado aos alunos um Questionário Inicial que visava caracterizar a turma em profundidade, de modo a ser possível efetuar os ajustes necessários à planificação do tópico "Reflexão, rotação e translação" no âmbito do tema "Geometria".

Mais concretamente, pretendeu obter-se informação sobre os seus gostos, hábitos e alguns conhecimentos básicos de utilização do computador, bem como o gosto pela Geometria, qual a importância que lhe atribuíam ou com que software já tinham trabalhado. Foi, também, recolhida informação sobre a noção que os alunos tinham de criatividade e a sua relação com o ensino e a aprendizagem da Matemática. O questionário foi respondido individualmente numa aula de Formação Cívica, com a colaboração da Diretora de Turma.

Para aferir o nível de proficiência dos alunos na utilização do computador em geral, e do GeoGebra em particular, foi implementado no dia 6 de fevereiro de 2012, o teste de competências tecnológicas (anexo 04) cujos resultados serviram, posteriormente, para realizar ajustes na estrutura das tarefas que viriam a ser implementadas.

A segunda etapa, depois de definida a problemática e a questão de investigação para este estudo, caracterizou-se pela estruturação de uma trajetória de aprendizagem para o tópico "Reflexão, rotação e translação", do tema Geometria, do 6.º Ano do Ensino Básico, onde se integrou a sequência didática de tarefas especialmente selecionadas para uma abordagem de natureza tecnológica e para a criatividade.

Assim, iniciou-se o processo pela análise e interpretação do currículo, tendo em conta os recursos e as condições existentes na escola. Partiu-se do propósito principal de ensino expresso no PMEB (Ponte et al, 2007) - "Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos" (p.36) - e dos seu objetivos gerais e analisou-se o tópico "Reflexão, rotação e translação" e os seus objetivos específicos.

Recorde-se que nas indicações metodológicas, é feita referência a uma abordagem complementar através da utilização de instrumentos de medida e de desenho e programas computacionais (Ponte et al., 2007, p.37). A calendarização da sequência didática foi alvo de ajuste em reunião do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais do agrupamento, coincidindo com o evoluir dos trabalhos de uma ação de formação para professores sobre a utilização do GeoGebra como ferramenta didática em Matemática, da qual o investigador era também formador. Este ajuste provocou uma dessincronização com o manual escolar que assume, frequentemente, grande importância para os alunos e respetivas famílias. Estes factos foram devidamente explicados e tomaram-se as medidas necessárias para reduzir, ao mínimo, quaisquer efeitos contraproducentes e que pudessem provocar mal-entendidos.

Pensou-se, então, numa abordagem da temática de natureza complementar, recorrendo à instrumentação, papel e lápis e a um ADGD, o GeoGebra. Pensou-se também que o ambiente de sala de aula deveria ser mediado por um sistema de gestão (CMS), que foi instalado pelo investigador na sala TIC, o iTALC. Como já se viu, este tipo de aplicações permite monitorizar o trabalho dos alunos, fazer demonstrações simultâneas nos seus computadores, tomar o controlo de uma estação de trabalho remotamente, permitindo também aos alunos partilharem o seu ecrã com o resto da turma. Os alunos foram, previamente, informados que o sistema se encontrava ativo e vários avisos foram, também afixados, na própria sala TIC. Além disso, o ecrã da estação de trabalho do professor, que continha o “Master” do CMS, esteve, constantemente, a ser projetado num quadro interativo, onde todos podiam ver, em tempo real, o que ocorria em todos os computadores da sala. Veja-se, na figura seguinte, um *printscreen* do ecrã do computador do professor na sala TIC. Pode-se distinguir o ambiente de trabalho e a janela principal do iTALC. Nesta, são visíveis os ecrãs das estações de trabalho dos alunos da mesma sala. Note-se que, por exemplo, o computador número nove está desligado e que os alunos dos terminais seis, sete e onze não estão, nesse momento, envolvidos na tarefa.

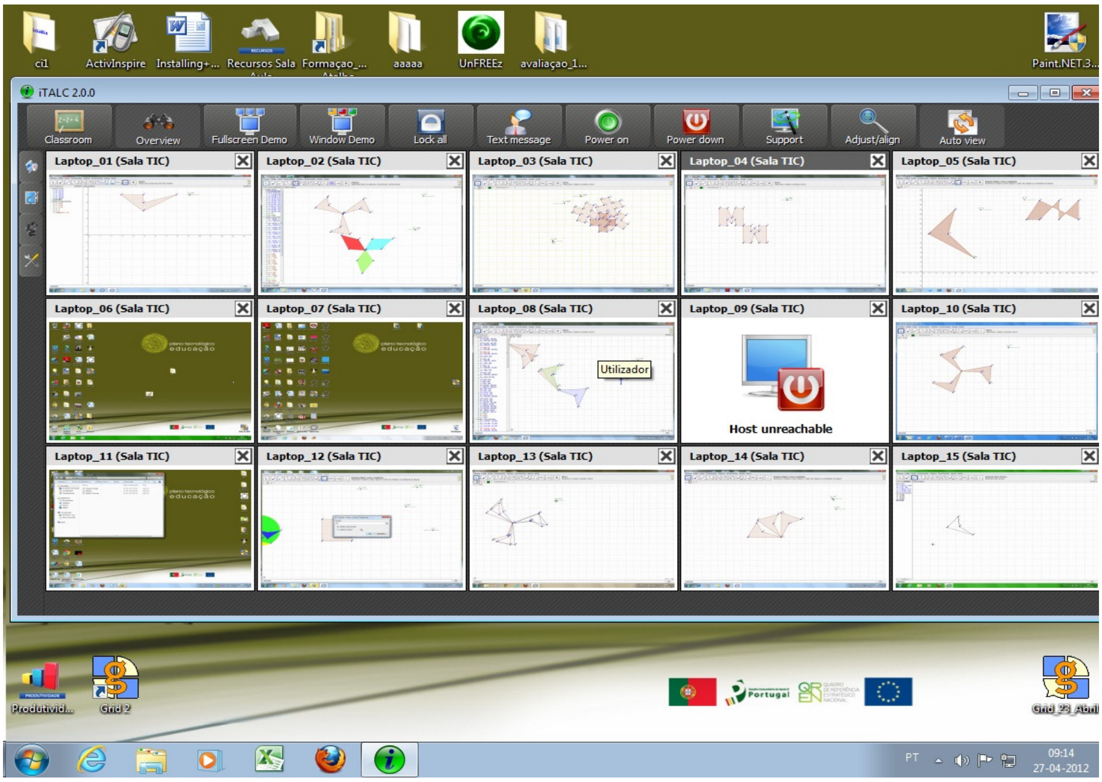


Fig. 15 - Ambiente de trabalho do terminal do professor

Recorde-se que o professor pode, também, maximizar uma janela correspondente ao ecrã de um computador de um aluno de forma a permitir que este possa projetar o seu trabalho para toda a turma e em tempo real, o que foi feito. O professor pode, também, realizar demonstrações diretamente em todos os computadores simultaneamente e controlar uma estação de trabalho que necessitar. Isto revelou-se muito útil para ajudar um grupo de alunos com dúvidas relacionadas com o software ou com a própria matemática e, ao mesmo tempo, continuar o trabalho de monitorização e acompanhamento do resto da turma. Estes momentos revelaram-se particularmente valiosos porque apareciam múltiplas situações sobre os mais variados aspectos em diferentes grupos, que eram intervencionados pelo professor e acompanhados pelos outros alunos. A possibilidade de envio de mensagens escritas aos alunos também estava disponível e foi usada para pequenas correções e chamadas de atenção que careciam de interesse para a turma em geral.

A terceira etapa, correspondente à implementação do estudo empírico, decorreu no início do terceiro período escolar.

No sentido de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos acerca do tópico “Translação, reflexão e rotação” - pois já tinha sido abordado no 1.º Ciclo aquando da participação desta turma, como turma-piloto, na implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al, 2007), - procedeu-se à aplicação de um teste, na modalidade pré-teste, em papel e lápis e com recurso ao GeoGebra. De carácter individual, teve uma duração de 90 minutos, com 45 min, para cada parte.

Para a realização da parte prática do pré-teste com recurso ao GeoGebra, foi dada, a toda a turma numa aula anterior, uma pequena explicação sobre o menu das transformações geométricas do programa, uma vez que todos os alunos, no espaço que medeia entre o começo dos segundo e terceiro períodos, instalaram o GeoGebra nos seus computadores de casa onde, ocasionalmente, faziam alguns trabalhos no âmbito da Matemática e das Expressões. Isto permitiu-lhes uma adaptação gradual à sua interface e uma familiarização com algumas das suas ferramentas e procedimentos.

Como já referido, para a realização do teste, foi requisitada uma sala de informática com 15 computadores. O teste foi realizado em dois turnos de 45 minutos: enquanto metade da turma fazia a parte em papel e lápis, numa sala contígua à sala TIC, a outra parte realizava as tarefas no computador.

O professor de TIC foi de inestimável ajuda, ao permanecer os 90 minutos na respetiva sala, orientando os alunos, sobretudo em questões relacionadas com a criação e manipulação de ficheiros. Este teste foi realizado no dia 13 de abril.

A implementação da sequência didática decorreu entre o final de abril e o início de maio de 2012. As aulas de Matemática foram, então, e graças à colaboração de outros professores que aceitaram mudanças nos seus horários, transferidas para a sala TIC, onde se implementavam as tarefas preparadas para este estudo empírico. Estas foram sempre trabalhadas em grupos, que se mantiveram com a sua configuração original até ao fim do estudo.

Foram implementadas no total, sete tarefas, com complexidade crescente, quer matemática, quer técnica, que decorreriam, segundo a previsão inicial, em oito sessões. No entanto este plano não sobreviveu ao contacto com a realidade e foi necessário acrescentar, às tarefas VI e VII, meio bloco para as finalizar convenientemente, totalizando-se assim 10 sessões.

No final de cada aula, foram recolhidas as produções dos alunos e as notas de campo eram, logo que possível, alvo de reflexão, o que permitiu enriquecer regularmente o Diário de Bordo. O trabalho dos alunos era alvo de análise sistemática, de modo a aferir a necessidade de proceder ou não a alterações à planificação das aulas seguintes.

A dinâmica de sala de aula e o enfoque assumidos desde o início da implementação da sequência didática reportam-se a paradigma sócio-construtivista ou mesmo construtivista comunal onde o papel do investigador/professor foi o de facilitador e promotor de todo o processo.

Três semanas depois do início desta etapa, os alunos fizeram o teste (na modalidade pós-teste) no dia 9 de maio, e responderam a um Questionário Final (anexo 13). Os procedimentos foram análogos aos descritos anteriormente para a modalidade pré-teste e para o Questionário Inicial.

5.2. As Tarefas

No processo de seleção/criação das tarefas procurou-se “encontrar situações de aprendizagem de natureza exploratória (…)” que constituíssem “(…) bons pontos de partida para o estudo de novos assuntos, circunscrevendo desse modo a abordagem verbalista e expositiva tão ao gosto do ensino direto” (Ponte, 2005, p.18) cujo traço distintivo assenta na ideia de que “o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem.” (idem, p.13).

Neste contexto, estavam também previstas, na sua implementação, quatro fases distintas:

1) Introdução da tarefa;
2) Desenvolvimento da tarefa;
3) Discussão da tarefa, e
4) Sistematização das aprendizagens matemáticas (Stein et al., 2008).

Na primeira fase, apresentou-se a tarefa oralmente e clarificaram-se alguns aspectos considerados pertinentes pelo professor ou por solicitação direta dos alunos.

Na fase seguinte, os grupos de trabalho realizaram, de forma autónoma, as tarefas, explorando os caminhos e propondo soluções que resultavam do trabalho colaborativo com o colega de grupo. Esta fase foi acompanhada de perto pelo professor, "diretamente" - quando as tarefas tinham uma natureza instrumental num ambiente de papel e lápis, - ou através do CMS, quando as tarefas se realizavam no computador.

Como sublinha Ponte (2005), "É muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar." (p.9).

Durante esta fase, foram tiradas notas acerca das resoluções apresentadas, dos processos e das dificuldades que iam surgindo.

Na terceira fase, os grupos de trabalho apresentavam os resultados das suas explorações, quer em termos de processos, quer em termos de soluções encontradas. Nas tarefas executadas no computador, este procedimento foi facilitado pela utilização do CMS que permitia a cada grupo projetar o ecrã da sua estação de trabalho no quadro interativo. Foi muito importante criar uma atmosfera apropriada, onde os alunos tivessem espaço para "errar", com tempo para pensar ao seu ritmo e nível, oportunidade para discutir com os colegas e professor e ainda para partilhar ideias (Candeias, 2005).

Os alunos partilharam, assim, pública e livremente as suas ideias, apresentaram os seus pontos de vista e ouviam o *feedback* de colegas e do professor que se esforçou sempre por colocar questões que ajudassem os alunos a pensar. Estava criado um espaço de confronto e de discussão onde a tecnologia era usada como ferramenta de aprendizagem e de mediação "social". Nesta fase, a atenção do professor centrou-se na preocupação constante e sistemática de valorizar o trabalho dos alunos, sobretudo daqueles que propunham processos e soluções mais originais para as tarefas. Este aspecto revelou ser de grande importância, como se verá mais adiante.

Finalmente, a quarta fase da implementação de cada tarefa consistia em sistematizar o que fora aprendido produzindo-se pequenos relatórios escritos no caderno diário. A atmosfera caracterizava-se, como diz Papert, por uma permissividade inteligente, de atividade intensa, onde os alunos expunham os seus pontos de vista, emitiam opiniões e apresentavam justificações para os seus processos e soluções.

Veja-se, de seguida, o desenho de cada uma das tarefas da sequência didática.

A tarefa I (anexo 06), foi elaborada com o objetivo de fazer recordar aos alunos conceitos relacionados com transformações geométricas isométricas abordados no 1.º Ciclo do Ensino Básico e proporcionar-lhes uma exploração, mais ou menos informal, das transformações reflexão, rotação e translação. A sua realização estava prevista para um bloco de 90 minutos e utilizava materiais e instrumentação tradicionais em ambientes de papel e lápis e computacionais de geometria dinâmica. A tarefa foi implementada no dia 16 de abril, no tempo previsto.

Na primeira questão da tarefa I, foi mostrado aos alunos, em papel, um conjunto de seis imagens e os respetivos transformados (ver figura seguinte).

Solicitou-se então que, utilizando acetato, miras, espelhos, ou papel vegetal, identificassem de que forma se tinham obtido aqueles transformados. Nas imagens fornecidas estavam implícitas translações, rotações e reflexões de eixos horizontais e oblíquos. Nesta exploração, em ambiente de papel e lápis, os alunos assinalavam os centros de rotação, os eixos de reflexão e os vetores utilizados. Tratou-se de uma primeira questão, não muito formal, que visava, sobretudo, recordar alguns conceitos e promover uma adaptação dos alunos aos instrumentos e à linguagem específica da temática.

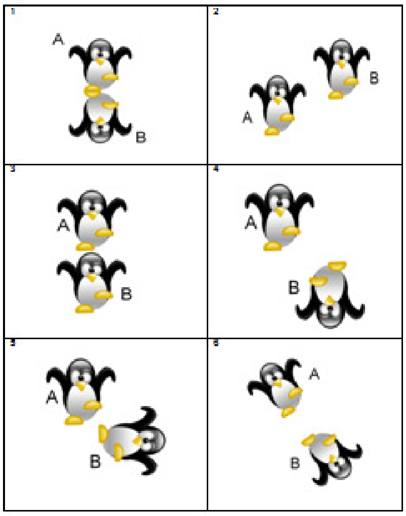


Fig. 16 - Conjunto de imagens da primeira questão da tarefa I

Na segunda questão, perguntava-se aos alunos se tinha sido possível, para todos os casos apresentados, obter sempre o transformado (por ação de uma isometria) e pedia-se que descrevessem, por palavras próprias, e para cada situação, como o tinham conseguido. Pretendia-se, aqui, colocar os alunos a "falar" Geometria.

Na terceira questão, o objetivo era fazer a passagem do ambiente de papel e lápis para o Ambiente Dinâmico de Geometria Dinâmica, o GeoGebra. Solicitava-se, então, e também de forma informal, que tentassem replicar, no GeoGebra, aquilo que tinham feito através de instrumentos no papel.

Repare-se que esta proposta propiciava um domínio crescente do menu "transformações" e dos procedimentos de inserção e manipulação de imagens e objetos na área gráfica da aplicação. Esta familiarização técnica tornou-se num pressuposto crítico no desenrolar da sequência didática.

Na quarta e última questão desta tarefa, os alunos eram convidados a criarem livremente uma "construção" ao seu gosto usando a translação, a rotação e a reflexão. Mantinha-se um baixo grau de formalismo e a suficiente abertura para que os alunos se envolvessem num processo de natureza mais criativa.

A tarefa II (anexo 07) centrava-se apenas na reflexão. A sua realização estava prevista para um bloco de 90 minutos e estava concebida para que os alunos evoluíssem de uma abordagem mais informal, com materiais e instrumentação tradicionais em ambiente de papel e lápis, passando por um exploração, ainda informal, com o GeoGebra e terminando, novamente, em ambiente de papel e lápis, mas já de forma bastante mais formal. A tarefa foi implementada no dia 18 de abril, no tempo previsto. Na primeira alínea da primeira questão, realizada em ambiente de papel e lápis, pedia-se aos alunos que identificassem, com a ajuda de um mira, os eixos de um conjunto de imagens e respetivos transformados (ver figura seguinte). As figuras, com tamanhos e posições distintas, estavam bastante próximas umas das outras e tinham subjacentes reflexões de eixos verticais, horizontais e oblíquos. Tratava-se, pois, de uma abordagem informal com recurso a instrumentação.

Na alínea seguinte, procurava-se que fizessem, novamente, a passagem para o ambiente computacional, ao requerer que reproduzissem o exercício anterior no GeoGebra.

Fig. 17 - Conjunto de imagens da primeira questão da tarefa II

Na segunda questão, de natureza mais formal, solicitava-se aos alunos que desenhassem, em papel quadriculado, os transformados de um octógono, por reflexões de eixo vertical, horizontal e oblíquo (ver figura seguinte). No final, para efeitos de confirmação ou correção, foi permitido que usassem o mira. A questão continha já um grau de formalismo mais elevado e concebido com a intenção de os alunos conjeturarem sobre a relação entre as distâncias dos diferentes pontos e os respetivos transformados. O polígono continha pontos identificados pelo que, os seus transformados, teriam também de ser formalmente nomeados.

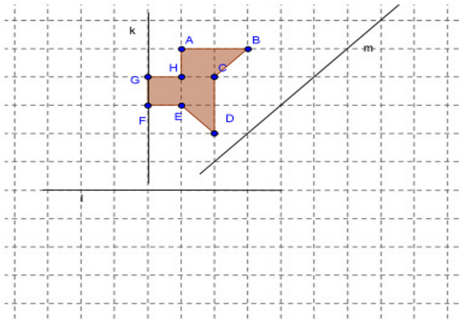


Fig. 18 - Polígono e eixos utilizados na segunda questão da tarefa II

A tarefa III (anexo 08) perseguia uma abordagem diferente. Centrada na rotação, pretendia-se que os alunos abordassem o conceito através do GeoGebra, numa primeira questão e, numa segunda, evoluíssem para um ambiente de papel e lápis com maior exigência formal. Esta tarefa proporcionava um retorno ao ADGD mas com o objetivo de proporcionar aos alunos um ambiente de exploração livre. A sua realização estava prevista para um bloco de 90 minutos e utilizava materiais e instrumentação tradicionais em ambientes de papel e lápis e computacionais de geometria dinâmica. A tarefa foi implementada no dia 20 de abril, no tempo previsto para a sua realização.

Na primeira questão da tarefa III, pedia-se aos alunos que, usando um ficheiro do GeoGebra previamente preparado, encontrassem o transformado de um quadrilátero, primeiro através de uma rotação de centro C e medida de amplitude do ângulo +120º e depois outro, com o mesmo centro C mas com -120º de medida de amplitude do ângulo de rotação. Nesta tarefa, introduzia-se o conceito de seletor no GeoGebra, como número que pode ser modificado.

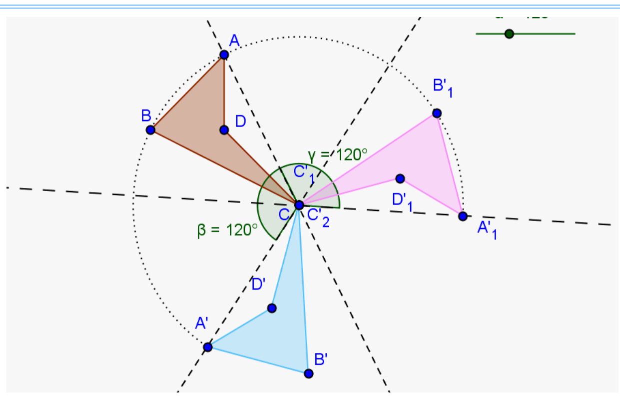


Fig. 19 - Imagem relativa à primeira questão da tarefa III.

Numa segunda questão pedia-se, o mesmo trabalho, sobre a mesma figura, mas agora utilizando um ambiente de papel e lápis, recorrendo a uma folha de acetato, um transferidor e um compasso.

Na terceira questão, solicitava-se aos alunos que criassem uma composição livre, no GeoGebra, utilizando rotações e, na quarta questão, que descrevessem aquilo que tinham feito para o conseguir.

A tarefa IV (anexo 09), centrada na translação, estava prevista para ser realizada num bloco de 90 minutos. Apelava à utilização de instrumentos tradicionais em ambiente de papel e lápis, numa abordagem com um certo grau de formalismo, mas também propunha que se utilizasse o GeoGebra numa criação livre onde os alunos pudessem explanar a sua criatividade. A tarefa foi implementada no dia 23 de abril, no tempo previsto para o efeito.

Na primeira alínea da primeira questão, fornecia-se aos alunos, em papel, uma construção que constava de uma imagem e seis transformados por diversas translações (ver figura seguinte). Pedia-se que, num papel quadriculado, representassem os vetores associados a cada uma delas.

Na segunda alínea da mesma questão, solicitava-se uma caracterização desses vetores e uma denotação mais formal.

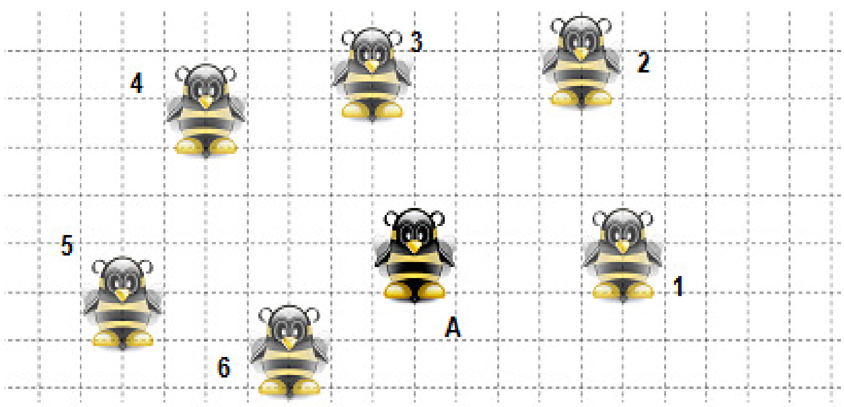


Fig. 20 - Conjunto de imagens da primeira questão da tarefa IV

Na primeira alínea da segunda questão, solicitava-se aos alunos que desenhassem, em papel quadriculado e com a ajuda de uma régua, o transformado de um polígono obtido por translação associado a um vetor $\vec{u}$. Pretendia-se que os alunos utilizassem já um vocabulário mais rigoroso e formal.

Numa segunda alínea, inquiria-se os alunos sobre o que aconteceria ao transformado, relativamente à sua posição, dimensões e orientação, se se modificasse, por um lado, a medida de comprimento do vetor e, por outro, a sua direção.

Na terceira questão, solicitava-se uma construção livre utilizando translações. O grau de abertura desta questão é muito elevado e tinha a intenção que os alunos produzissem um elevado número de respostas por diferentes processos.

Na tarefa V (anexo 10), abordava-se o conceito de reflexão deslizante que era, então, desconhecida dos alunos. A tarefa foi implementada no dia 27 de abril e estava prevista para ser realizada num bloco de 90 minutos mas esse tempo revelou-se insuficiente, tendo a sua conclusão ocorrido durante a primeira metade da aula de 30 de abril.

Na primeira questão, começava-se por pedir aos alunos que, recorrendo a um ficheiro preparado previamente no GeoGebra, "deslocassem" uma figura de uma dada localização para outra diferente utilizando, livremente, as isometrias abordadas nas aulas anteriores (ver figura seguinte). Esta questão é bastante aberta, possibilitando inúmeras soluções. Simultaneamente, introduzia-se uma noção um pouco mais formal de composição de isometrias, pois era necessário utilizar, de forma combinada, várias isometrias para encontrar uma solução.

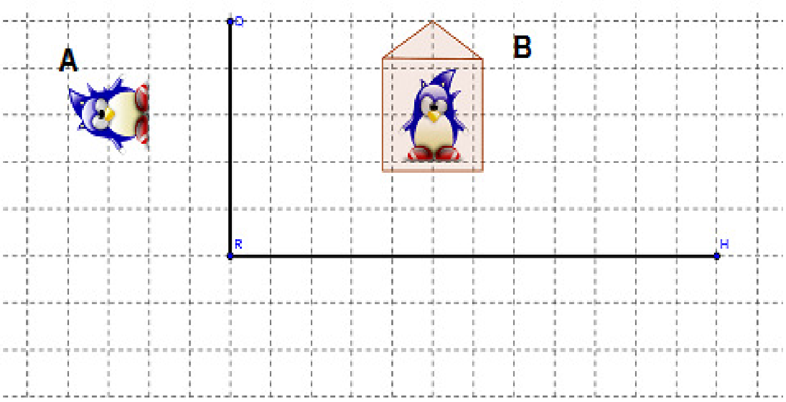


Fig. 21 - Posição relativa das figuras da primeira questão da tarefa V

Na segunda alínea, os alunos tinham de descrever a solução que propunham.

Na segunda questão, também realizada no GeoGebra, era fornecido aos alunos um ficheiro desta aplicação que continha duas situações distintas: uma primeira onde a imagem e o seu transformado estavam relacionados por uma meia volta ou por uma composição de duas reflexões de eixos perpendiculares, e uma segunda onde tal não era possível mas era admitida a composição de uma meia-volta e de uma reflexão, e de uma reflexão e uma translação (veja-se a figura seguinte). Esta última composição interessava particularmente, pois introduzia o conceito de reflexão deslizante. Na segunda alínea desta questão, pedia-se aos alunos que descrevessem os procedimentos efetuados para cada caso.

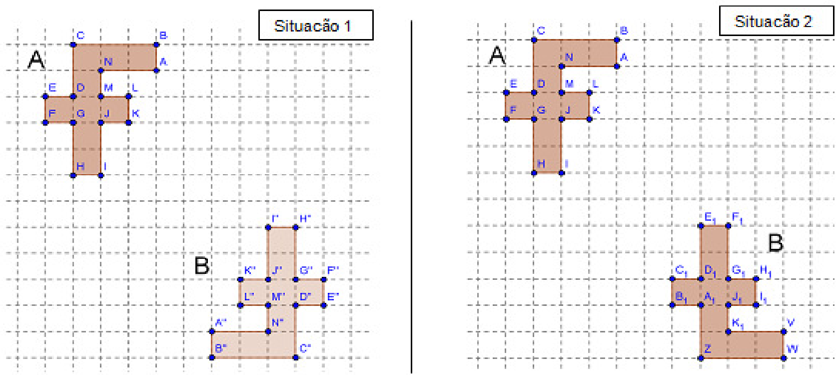


Fig. 22 - As duas situações propostas na segunda questão da tarefa V

A terceira alínea era uma síntese das duas anteriores onde se introduzia o termo "reflexão deslizante".

Na terceira questão, pedia-se aos alunos, numa primeira alínea, para simular esta isometria no GeoGebra e, numa segunda, que descrevessem o que tinham feito.

Na quarta e última questão desta tarefa pedia-se, como já vinha sendo habitual, uma construção livre, onde fossem aplicadas composições de isometrias.

A tarefa VI (anexo 11), (adaptada de Cabrita et al., 2011), incidia sobre o conceito de simetria que a totalidade dos alunos confundia com reflexão. Estando inicialmente prevista para ser realizada num bloco de 90 minutos, sofreu um ajuste em termos de duração para 135 minutos, ou seja, um bloco e meio. Iniciou-se a sua implementação no dia 30 de abril, no segundo meio bloco e a sua conclusão ocorreu no final da aula de 2 de maio.

Numa primeira questão, foi fornecido aos alunos um mira e um conjunto de quatro figuras diferentes em papel (ver figura seguinte).

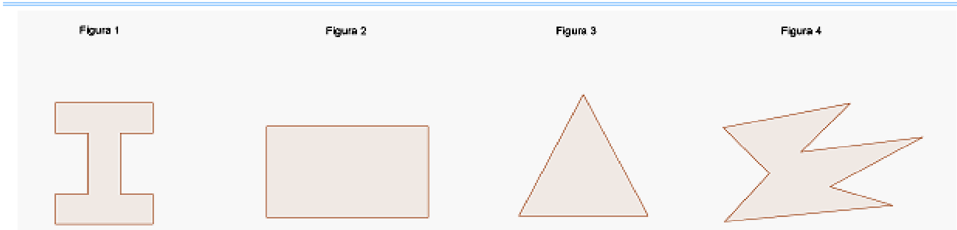


Fig. 23 - Conjunto de figuras propostas na primeira questão da tarefa VI (fonte: Cabrita et al., 2011)

Na primeira alínea, pedia-se aos alunos que, manipulando o mira e aplicando reflexões, "deixassem", no entanto, cada figura invariante. Os alunos traçavam o eixo quando tal era possível. As figuras admitiam vários eixos de simetria excepto uma que não apresentava simetria por reflexão. Uma extensão da questão incitava os alunos a explorarem o caso do círculo.

Na segunda alínea, os alunos completavam um quadro onde era pedida uma descrição sucinta da posição dos eixos e quantos tinham sido encontrados para cada figura.

Na alínea seguinte, pediu-se aos alunos que discutissem os resultados relativos à figura número 4, que não admitia qualquer eixo de simetria.

A questão número dois era semelhante à anterior, mas recorrendo ao GeoGebra e com uma variação: os alunos, antes de realizarem as reflexões, deviam prever as distintas posições dos eixos. Tratava-se, portanto, da exploração do conceito de simetria associado às reflexões. Para abordar a ideia de simetria rotacional, na questão número 3, foram dados aos alunos pioneses, papel vegetal e um conjunto de quatro figuras, que representavam pás de moinhos (veja-se a figura seguinte). Solicitava-se que sobrepusessem as figuras, colocassem o pionés num ponto determinado (centro de rotação) e que rodassem o papel vegetal, apenas no sentido retrógrado, de modo a determinar, para cada figura, quantas rotações deixavam a figura invariante.

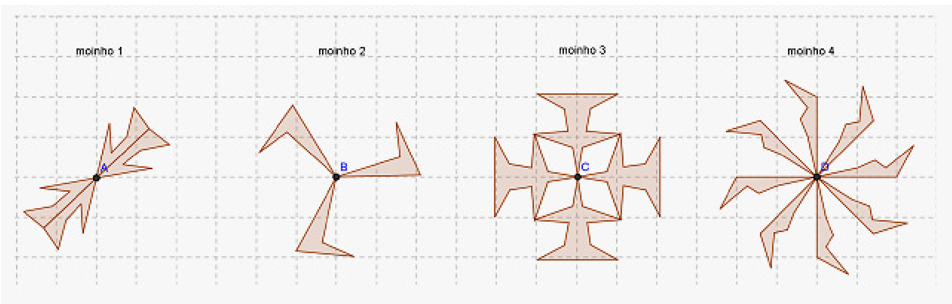


Fig. 24 - Conjunto de figuras propostas na terceira questão da tarefa VI (fonte: Cabrita et al., 2011)

Na alínea seguinte, os alunos foram convidados a medir as amplitudes dos ângulos dessas rotações e a preencher um quadro onde se solicitava a identificação do centro de rotação, as medidas das amplitudes dos ângulos, a relação entre a medida do menor ângulo e 360º e o número de pás de cada moinho.

Na alínea seguinte, pedia-se aos alunos que confirmassem os resultados no GeoGebra e os discutissem com os colegas. Para terminar a tarefa VI, na questão 4, incentivava-se os alunos a construir, de forma livre, figuras com simetria rotacional e axial.

Na tarefa número VII (adaptada de Cabrita et al., 2011) pretendia-se explorar o conceito de simetria translacional (ver anexo 12). Prevista inicialmente para ser realizada num bloco e meio (135 minutos) sofreu também um ajuste, em termos de duração, para dois blocos de 90 minutos. Iniciou-se a sua implementação no dia 4 de Maio e a sua conclusão ocorreu no final da aula de 7 de maio.

Foi fornecida aos alunos uma figura de um friso em papel e em acetato (veja-se a figura seguinte).

Na primeira questão, começava-se por instruir os alunos para que sobrepusessem o acetato sobre o papel de forma a fazer coincidir, ponto por ponto, as imagens.

Na primeira alínea pedia-se-lhes que deslocassem o acetato e "descobrissem" um vetor que permitisse que uma translação a ele associada e aplicada à figura a mantivesse invariante. Representavam, em seguida, esse vetor num quadriculado em papel.

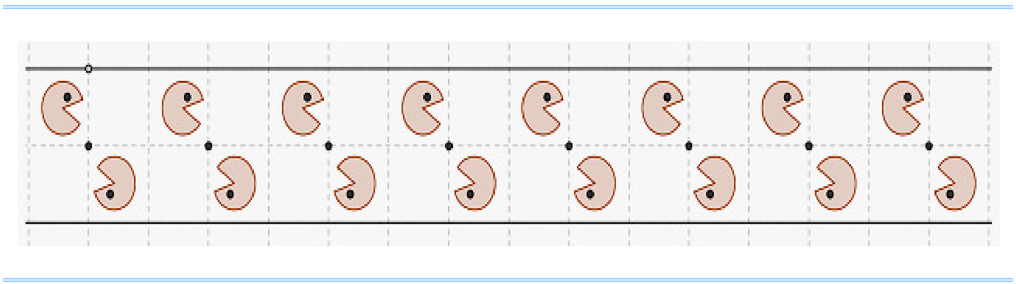


Fig. 25 - Friso da primeira questão da tarefa VII (fonte: Cabrita et al., 2011)

Na segunda alínea, incentivou-se os alunos a escolherem, de uma lista, outros vetores que respeitassem as condições da alínea 1.

Na alínea três, solicitava-se o preenchimento de um quadro cujo objetivo era caracterizar, em termos de direção, sentido e medida de comprimento, cada um dos vetores selecionados na alínea anterior e, com base na análise deste quadro, na alínea seguinte, os alunos tinham de encontrar uma expressão numérica que traduzisse a medida de comprimento de todos os vetores que satisfizessem a condição estabelecida na segunda alínea desta questão.

Na quinta alínea apresentava-se um "não friso", onde nenhuma translação deixava a figura invariante, e desafiava-se os alunos a encontrarem um vetor que mostrasse o contrário.

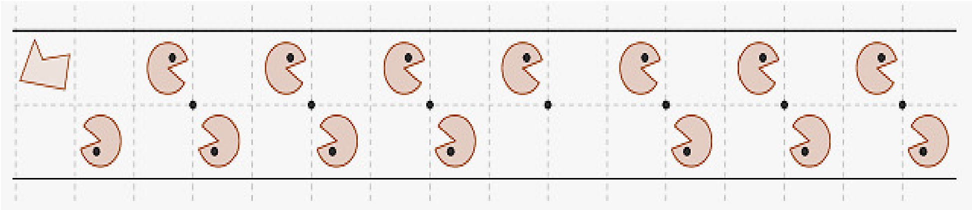


Fig. 26 - "Não friso" da quinta alínea da primeira questão da tarefa VII (fonte: Cabrita et al., 2011)

Na questão número dois, fornecia-se aos alunos um ficheiro do GeoGebra com um friso, e na primeira alínea solicitava-se, que manipulassem e caracterizassem um vetor associado a uma translação do próprio friso, de modo a deixar a figura invariante.

Na segunda alínea, questionava-se os alunos sobre a medida de comprimento de quatro vetores que permitissem simetria translacional e incentivava-se a uma análise comparativa com os resultados do quadro da terceira alínea da primeira questão.

Na última alínea, perguntava-se aos alunos se a expressão encontrada na alínea 2.4 poderia ser aplicada a este novos vetores.

Na terceira questão, solicitava-se a criação de um friso em papel quadriculado e, na quarta, a construção, no GeoGebra, de um qualquer friso e a respetiva descrição dos procedimentos efetuados na sua criação.

6. Tratamento e Apresentação de Dados

Durante este estudo, o processo de análise e tratamento de dados decorreu de forma simultânea com a sua recolha. Alguns dados retirados das respostas fechadas dos questionários e dos testes, nas suas modalidades pré e pós (ver critérios de classificação do teste – Anexo 14), foram alvo de análise quantificada que envolveu algum tratamento estatístico por recurso ao Excel, ao nível da estatística descritiva básica e apresentados através de tabelas.

Os dados qualitativos foram alvo de análise de conteúdo, orientada por categorias de análise predefinidas, decorrentes dos objetivos/questões de investigação e de aspectos teóricos que emergiram na revisão de literatura, e outras que emergiram das produções dos alunos

Assim, definiram-se categorias sobre a Geometria - isometrias e simetria; sobre a Criatividade - o desenvolvimento da fluência, flexibilidade e originalidade; e no domínio das Atitudes.

No respeitante ao conhecimento e capacidades no âmbito geométrico, pretendeu verificar-se a evolução da capacidade dos alunos de resolver problemas geométricos que envolvessem conhecimentos relativos a isometrias e a simetria. Relativamente às dimensões da criatividade, tentou perceber-se ainda de que forma estas eram afetadas pela natureza da abordagem. Quanto à atitude, pretendia-se detetar alterações na perceção e nas reações emocionais dos alunos face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular.

Os dados serão apresentados no capítulo seguinte de forma descritiva e tanto quanto possível, interpretados, evidenciando-se as afirmações feitas com digitalizações de produções dos alunos, registos fotográficos (*printscreens*) e transcrições do Diário de Bordo e/ou respetivas das notas de campo.

CAPÍTULO III

Análise de Dados

> "Qualitative analysis transforms data into findings. No formula exists for that transformation. Guidance, yes. But no recipe. Direction can and will be offered, but the final destination remains unique for each inquirer, known only when - and if— arrived at."
> (Patton, 2002, p. 432).

Neste capítulo descreve-se, analisa-se e interpreta-se a informação recolhida durante o estudo empírico. Os dados foram obtidos, como já se referiu no capítulo anterior, através de múltiplas fontes e com recurso a diversos instrumentos e foram cruzados de forma a avaliar o impacto da abordagem proposta em cada um dos três dos casos selecionados ao nível do desenvolvimento de competências transversais e específicas e do seu pensamento criativo.

Pretendeu-se também que, para cada caso, esta análise contivesse uma dimensão interpretativa sobre os fenómenos e os processos que foram observados, durante a realização das diversas construções geométricas, em ambiente de "papel e lápis" e num ambiente dinâmico de geometria dinâmica (ADGD), tendo em vista a construção e aplicação de conhecimento geométrico dos alunos, o desenvolvimento das dimensões da criatividade e na alteração de atitudes face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular.

Assim, para cada um do três casos selecionados, faz-se uma apresentação dos alunos que os integram salientando-se algumas das suas características pessoais e a relação que têm com a Matemática, particularmente com a Geometria. Evidenciam-se ainda alguns aspectos relacionados com as suas representações de criatividade que foram recolhidos através do Questionário Inicial.

Em seguida, analisa-se o trabalho realizado durante a implementação da sequência didática tentando-se descrever e interpretar, para cada categoria, as respostas, os comportamentos e reacções, os comentários e os artefactos produzidos durante a realização das tarefas, bem como outros dados obtidos a partir da observação direta e de conversas informais (recolhidos em notas de campo e vertidos no Diário de Bordo), dos testes (ver critérios de classificação do teste – Anexo 14), nas suas versões pré e pós, e do Questionário que foi aplicado no final do estudo empírico.

1. O Caso Catarina

O primeiro caso era composto por uma única aluna, a Catarina. A aluna tinha 11 anos à data da implementação deste estudo. A Catarina tinha tido, no ano letivo anterior, nível 5 a Matemática, que manteve nos dois primeiros períodos do ano em que decorreu este estudo. Era muito esforçada nas aulas, interessada e bastante participativa. Apresentava também uma forte personalidade marcada pela autoconfiança e segurança com que realizava as suas intervenções. A aluna era muito célere a realizar as tarefas o que lhe permitia, muitas vezes, explorar "outros" caminhos ou ajudar espontaneamente outros colegas em maior dificuldade.

No Questionário Inicial, a Catarina afirmava gostar de Matemática e referiu que se considerava uma aluna muito boa à disciplina. Assinalou possuir computador em casa com ligação à Internet e que o gostava de usar pouco, declarando um nível de conhecimento médio na sua utilização. A aluna indicou que raramente usava este recurso, mas que, quando o fazia, usava-o, essencialmente, como ferramenta de estudo. Acrescentou ainda que raramente utilizava o computador para qualquer outro fim. Declarou também saber manipular pastas e ficheiros em diferentes suportes, o que se confirmou aquando da realização do teste de competências tecnológicas, e considerou importante o seu uso para ensinar e aprender. Afirmou conhecer apenas o GeoGebra, pois já tinha realizado pequenos trabalhos com esta aplicação nas disciplinas de Matemática e EVT ao longo dos dois períodos anteriores. Sobre o gosto pela Geometria, a Catarina, apesar de a considerar importante, declarou não gostar porque, cita-se, *"...acho que é bastante aborrecida".*

Acerca das suas representações sobre a criatividade, a aluna em resposta à questão sobre o seu significado expressa uma ideia de originalidade:

O que significa para ti ser criativo?	
Catarina:	"... é fazer algo diferente do normal."

Quadro 2 - Resposta da Catarina sobre o significado de criatividade

Quando questionada acerca das áreas em que pensava ser possível ser criativo, referiu a escrita, a dança e a pintura. Não aparece aqui qualquer referência à música, apesar de se tratar de uma aluna do ensino articulado, com três disciplinas no conservatório:

Em que áreas pensas que é possível ser criativo?	
Catarina:	"... na escrita, na dança e na pintura."

Quadro 3 - Resposta da Catarina sobre as áreas em que é possível ser criativo

A aluna referiu que considerava possível ser-se criativo a Matemática. Quanto às justificações apresentam-se de seguida (ver quadro 4):

É possível ser criativo a Matemática? Justifica?	
Catarina:	"Sim, porque podemos criar. Por exemplo na geometria podemos inventar outras formas... coisas diferentes."

Quadro 4 - Resposta da Catarina sobre a possibilidade de ser-se criativo a Matemática

A Catarina indicou, também, que se achava criativa e que concordava fortemente com a ideia da criatividade ser um dom raro exclusivo de alguns e que era uma característica individual. Discordava, no entanto, que fosse uma característica que variasse com a idade. Também concordou fortemente que esta era uma capacidade fundamental e passível de ser desenvolvida e avaliada. Discordava, ainda, da impossibilidade de ser-se criativo a Matemática e concordava que a escola exercia um papel limitador sobre a criatividade. Manifestava, também, forte concordância sobre a necessidade de se realizarem aulas criativas para melhorar as aprendizagens dos alunos.

Quando questionada sobre os modos de trabalho em sala de aula, a aluna indicou preferência pelo trabalho em pares. A justificação pode ser observada a seguir (ver quadro 5):

Como gostas mais de trabalhar na sala de aula? Justifica a tua opção?	
Catarina:	"Em pares, porque há duas pessoas a pensar."

Quadro 5 - Resposta da Catarina sobre os modos de trabalho em sala de aula

Esta última resposta não deixa de ser curiosa pois a aluna, aquando do início da implementação da sequência didática, referiu que as outras pessoas de um grupo a impediam de pensar e solicitou trabalhar sozinha.

1.1. Conhecimento e Capacidades Geométricos

Relativamente ao conhecimento e capacidades geométricos pretende-se verificar se e como os alunos realizaram a respetiva apropriação de conhecimentos e evoluíram nas capacidades de reconhecer, visualizar, representar e transformar formas geométricas assim como de comunicar, raciocinar e resolver problemas, utilizando, quer o "ambiente de papel e lápis", quer o GeoGebra.

Assim, com o objetivo de se perceber o impacto dessa abordagem criativa na aluna Catarina, cruzaram-se os dados resultantes da observação das aulas com a informação obtida através das produções dos alunos, dos registos efetuados no Diário de Bordo e do teste.

1.1.1. Pré-Teste

Da imagem extraída da primeira questão do pré-teste (figura 27), acerca da transformação reflexão, verifica-se que a aluna seleciona a imagem correta. No entanto cometeu um erro, quase grosseiro, ao traçar o eixo de reflexão numa posição de tal forma incorreta que se admite que a possibilidade de o ter feito ao acaso. Apesar disto, a aluna revelou, desde logo, ter alguns conhecimentos sobre a isometria.

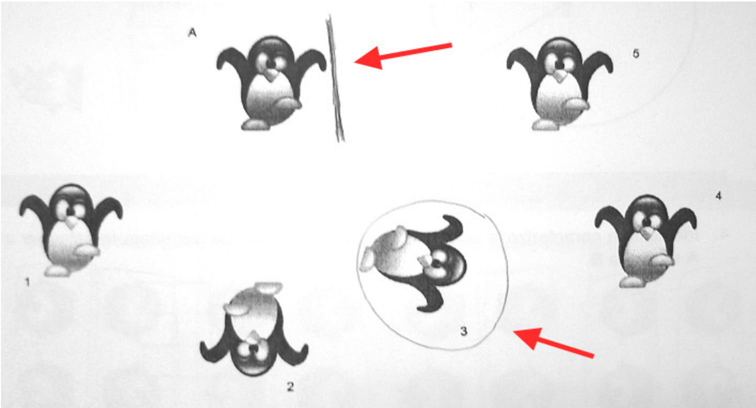


Fig. 27 - Resposta da Catarina à primeira questão do pré-teste

Não dando qualquer resposta à segunda questão (translações), acontecimento comum a todos os alunos da turma, a Catarina elaborou uma resposta à questão número três, centrada na rotação, mas visualizando uma reflexão (figura 28). Não deixa de ser curioso que, desta vez, e se se tratasse efetivamente, de uma reflexão, a proposta da aluna estaria correta, incluindo a posição do possível eixo que acrescentou. Podemos observar isto na figura seguinte:

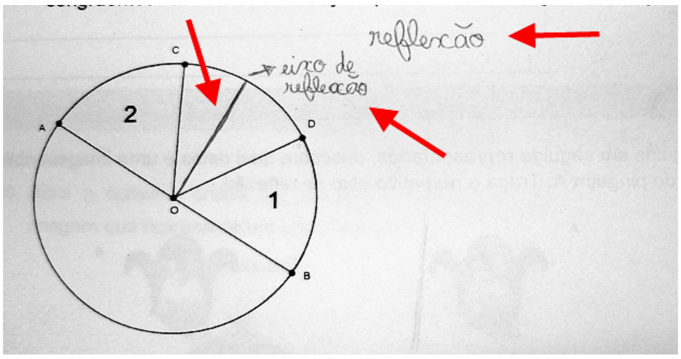


Fig. 28 - Resposta da Catarina à terceira questão do pré-teste

Não se tratando de uma reflexão, e mencionando-se o termo rotação no enunciado, conclui-se sobre o desconhecimento formal, por parte da aluna, desta isometria.

A aluna identificou corretamente, na primeira alínea da questão número cinco, uma reflexão mas não a caracterizou e em seguida, na pergunta número seis (figura 29), onde se solicitou que, através de isometrias, se "levasse o pinguim para casa", a aluna recorrendo ao "papel e lápis", realizou uma abordagem espantosa tal como se pode ver na imagem que se segue:

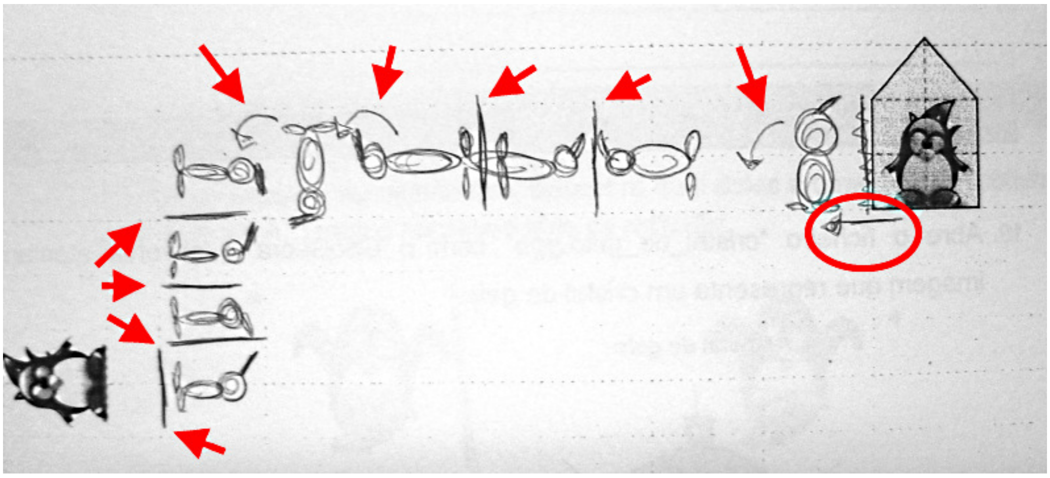


Fig. 29 - Resposta da Catarina à sexta questão do pré-teste

Repare-se que, estranhamente, resolve o problema do fim para o princípio começando com uma translação. Note-se a representação do mesmo vetor, apesar da medida de comprimento estar incorreta. Segue-se uma rotação e uma sucessão de reflexões que, como se pode observar-se através da posição do "penacho" do pinguim, revelam um entendimento, por parte da aluna, de que esta isometria provoca uma inversão de sentido dos ângulos. Veja-se também a alternância entre reflexões de eixo horizontal e vertical. A aluna pareceu, no entanto, não ter muito claro quais as implicações de aumentar a distância ao eixo, o que lhe teria poupado algum trabalho. A passagem para o ADGD não se realizou de forma bem sucedida devido à ausência de conceitos mais formais como centro, ângulo e sentido de rotação e sobre o próprio conceito de vetor. No discurso da Catarina sobre o processo de resolução, aparecem termos como "seta, transportar, rodar, virar e refletir". Apesar de informal, a abordagem intuitiva é extraordinária pois a distância que a separa das noções mais formais não é, de todo, muito grande.

A aluna voltou a ensaiar uma resposta à questão número oito (ver figura 30), onde se solicitava uma criação livre utilizando diferentes isometrias:

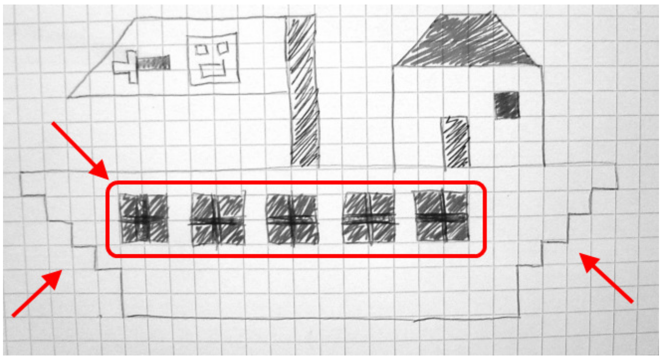


Fig. 30 - Resposta da Catarina à oitava questão do pré-teste

Não são observáveis quaisquer vestígios da utilização de transformações geométricas, no entanto, é possível verificar a existência de um friso constituído por quadrados e cruzes, assim como de um casco simétrico. Na resposta à questão seguinte, onde se solicitou uma explicação acerca dos procedimentos envolvidos na construção, a aluna referiu apenas:

-"Fiz um barco com várias figuras geométricas."

A *Catarina* foi a única aluna da turma a tentar uma resposta à questão número dez, centrada no conceito de simetria. Repare-se, na figura 31, que chegou a assinalar quatro eixos de reflexão que efetivamente configuram simetrias desta natureza para esta imagem.

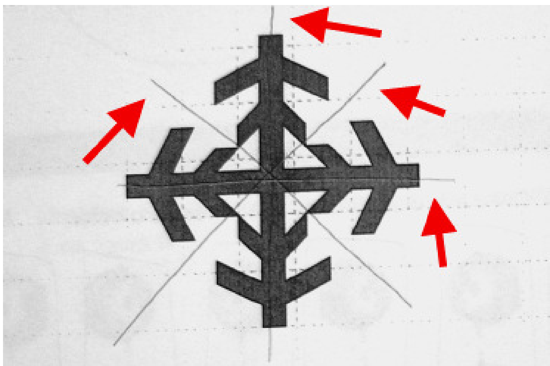


Fig. 31 - Resposta da Catarina à décima questão do pré-teste

Sobre estas também não produziu qualquer descrição, conforme solicitado no enunciado. Parece evidente, no entanto, que existia, à partida uma noção de simetria, embora, provavelmente, de forma associada e/ou confundida com a transformação reflexão.

A aluna não respondeu a qualquer outra questão do pré-teste.

1.1.2. Implementação da Sequência Didática

Tarefa I

Recorde-se que na primeira tarefa, solicitava-se aos alunos que investigassem algumas "transformações", utilizando acetatos, miras, transferidores, compassos e réguas de forma, relativamente informal. O professor, na fase de apresentação da tarefa, referiu-se às diferentes isometrias e discutiram-se aspectos relacionados com eixos de reflexão e centros de rotação, ângulos e sentido de rotação, segmentos de reta e vetores (de uma forma muito informal). Gerou-se, então, um pequeno debate com os alunos, de forma a recordarem a temática abordada ainda no Primeiro Ciclo de Ensino Básico. A Catarina resolveu a tarefa de forma célere utilizando, já, terminologia específica (Diário de Bordo, 16/04/2012). Apesar do nível de formalismo da tarefa permanecer bastante baixo note-se a adequada posição dos eixos, horizontal e diagonal e o vocabulário utilizado na descrição da transformação (ver figura 32).

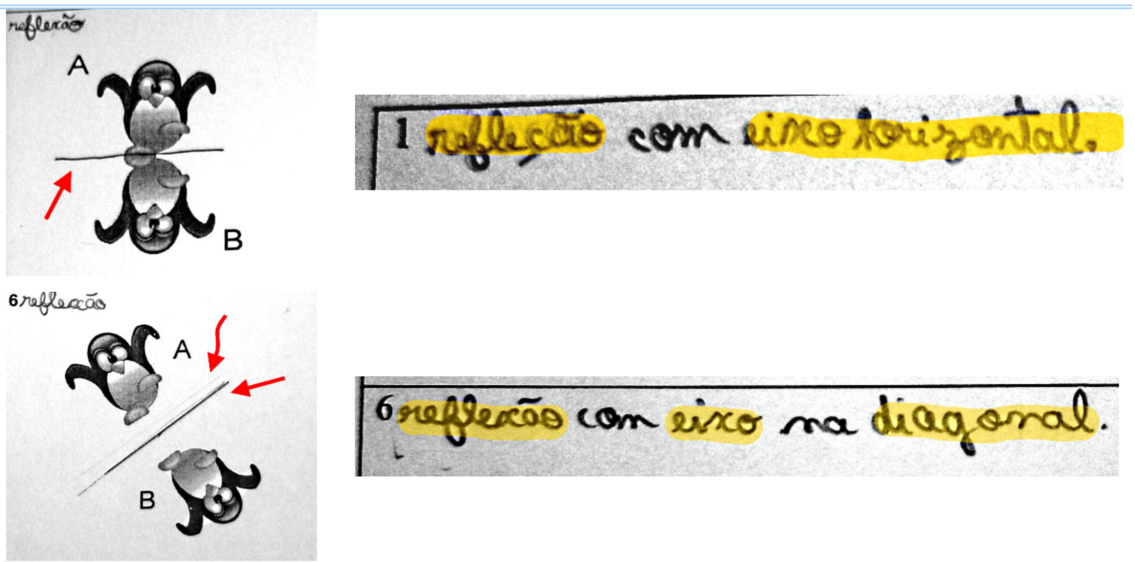


Fig. 32 - Resposta da Catarina à primeira e segunda questão da tarefa **I** - Reflexões

Além do erro ortográfico, corrigido já na reflexão de eixo diagonal, repare-se na ligeira dificuldade em traçar o eixo nesta reflexão, que careceu da utilização do mira, ao contrário da reflexão horizontal onde a aluna assumiu, imediatamente, que a posição do eixo estaria "entre" as imagens dispensando a sua utilização. A aluna identificou, também, as figuras que continham rotações recorrendo a um acetato apenas no caso da rotação de 180º. Apesar de alguma imprecisão, a Catarina caracterizou corretamente estas rotações revelando, ao contrário dos seus colegas, muito poucas dificuldades na utilização do transferidor para medir a amplitude dos ângulos de rotação. Apesar de algo problemática, a determinação dos respetivos centros também não constituiu uma dificuldade assinalável para esta aluna (Diário de Bordo, 16/04/2012).

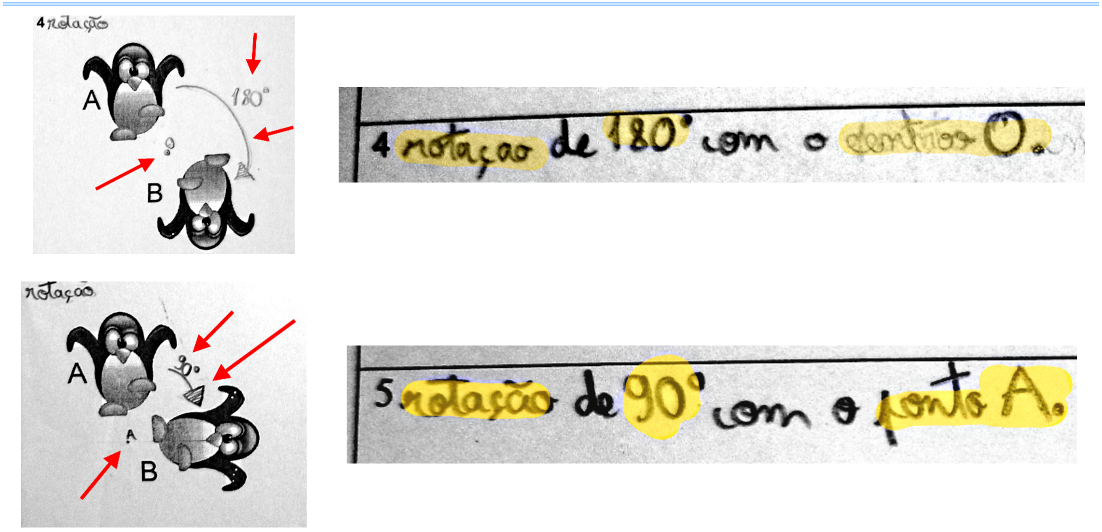


Fig. 33 - Resposta da Catarina à primeira e segunda questão da tarefa I - Rotações

No respeitante às duas situações que continham translações, é possível observar na figura seguinte que a aluna definiu, um ponto no "pé do pinguim", como referência para o primeiro caso, medindo posteriormente a distância para estabelecer a "intensidade" do vetor. No segundo caso, observa-se um erro no estabelecimento do vetor. Este ocorre porque a aluna não definiu, ao contrário da primeira situação, um ponto no objeto e a sua imagem correspondente.

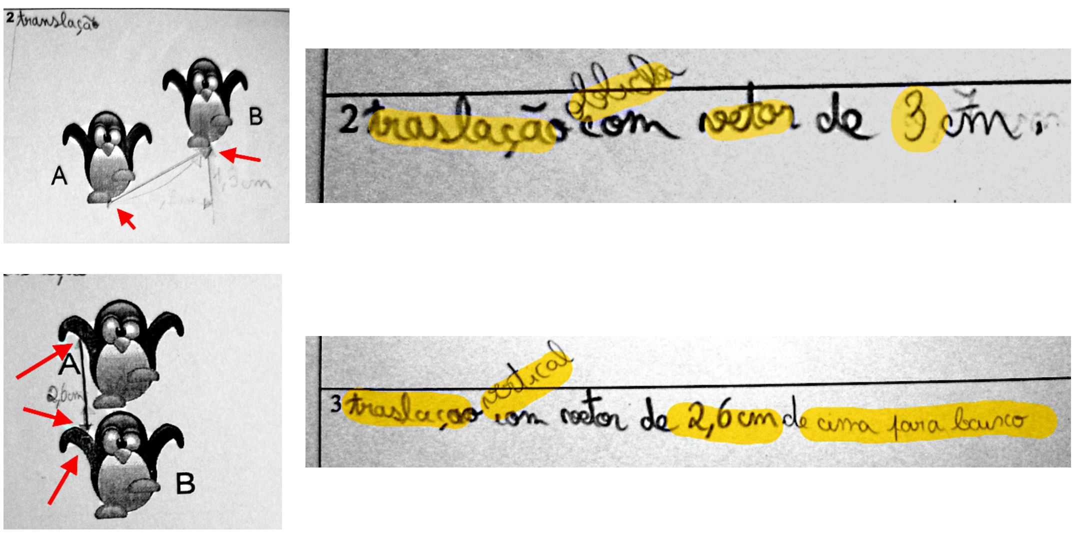


Fig. 34 - Resposta da Catarina à primeira e segunda questão da tarefa I - Translações

Apesar do erro, o vetor foi orientado estabelecendo claramente o objeto de partida e a respetiva imagem. Da análise do discurso verifica-se, também, a utilização de uma terminologia bastante apropriada.

Na terceira questão, tentava-se replicar no GeoGebra, as diferentes transformações que tinham sido exploradas no "papel e lápis" (figura 35). A tarefa foi resolvida também com um nível de proficiência notável, depois de exploradas, de modo conjunto com toda a turma, as ferramentas do menu "transformações". Foi nesta altura que se fez a introdução à noção e uso de seletores no GeoGebra. Refira-se que esta ferramenta acrescenta uma dimensão de caráter "muito exploratório" às tarefas, seja na sua conceção ou resolução. A possibilidade de fazer variar "os números" proporciona caminhos alternativos, que os alunos exploram de forma natural. O facto de estes seletores controlarem, essencialmente ângulos de rotação fez com que, possivelmente, se desenvolvesse nos alunos uma relação de "afetividade" com esta isometria, o que originou, como se verificará mais adiante, a realização de trabalhos com grande criatividade, pautados pela originalidade do produto, pela fluência na escolha das estratégias e pela flexibilidade com que se adaptaram e conjugaram processos e procedimentos.

Repare-se, na figura seguinte, na utilização de um seletor, na definição dos centros de rotação, e na posição dos vetores das translações afastados das figuras. Pode-se também observar a existência, junto a alguns pinguins, de um segmento de reta. Este segmento serve apenas, no GeoGebra, para poder manipular a posição e a dimensão de imagens inseridas na área gráfica deste ADGD.

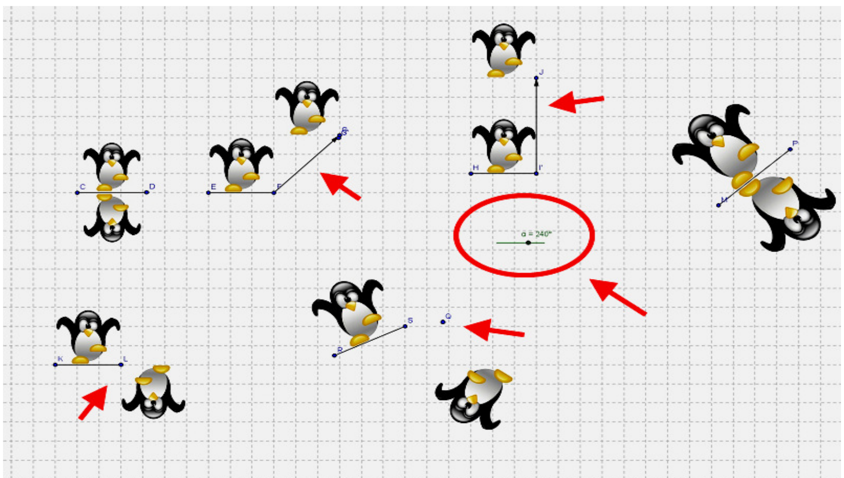


Fig. 35 - Resposta da Catarina à terceira questão da tarefa I

Tarefa II

Na exploração da primeira questão da tarefa II, a aluna mostrou já uma certa facilidade na identificação dos eixos de uma reflexão, independentemente de serem horizontais ou oblíquos. Recorrendo ainda ao mira, estabeleceu a posição de diferentes eixos associados a várias reflexões. Note-se, novamente, as dificuldades da aluna em traçar os eixos, devido ao afastamento provocado pela espessura da ponta do lápis (ver figura 36). Quando confrontada, pelo professor, sobre as distâncias dos objetos e respetivas imagens aos eixos, a aluna respondeu sem hesitação (Diário de Bordo, 16/04/2012):

- *"...claro que tem de ser igual"*.

Mesmo os "pinguins esquiadores" mais pequenos, pela sua situação de afastamento e pelo facto de se encontrarem numa posição obliqua relativamente ao papel, não constituíram um grande desafio, como se pode observar também na mesma figura, onde se constata a ausência de tentativas reiteradas, identificáveis por marcas de lápis no papel, de estabelecer o respetivo eixo.

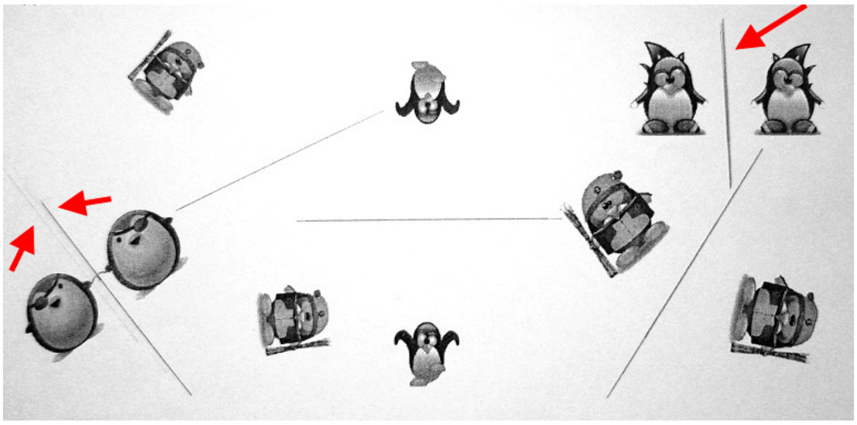


Fig. 36 - Resposta da Catarina à primeira alínea da primeira questão da tarefa II

Quando solicitada a reproduzir, no GeoGebra, o trabalho efetuado em papel na alínea anterior, a Catarina voltou a demonstrar uma grande facilidade em realizar as tarefas (ver figura 37), utilizando, de forma espontânea, as caixas de ferramentas relacionadas com as retas e segmentos de reta e com as transformações geométricas. Neste caso, a aluna usou, como eixo de reflexão, segmentos de reta por motivos de simplificação visual da "construção". No final da tarefa, foram "traçadas" as retas correspondentes a cada situação (não observável na figura seguinte).

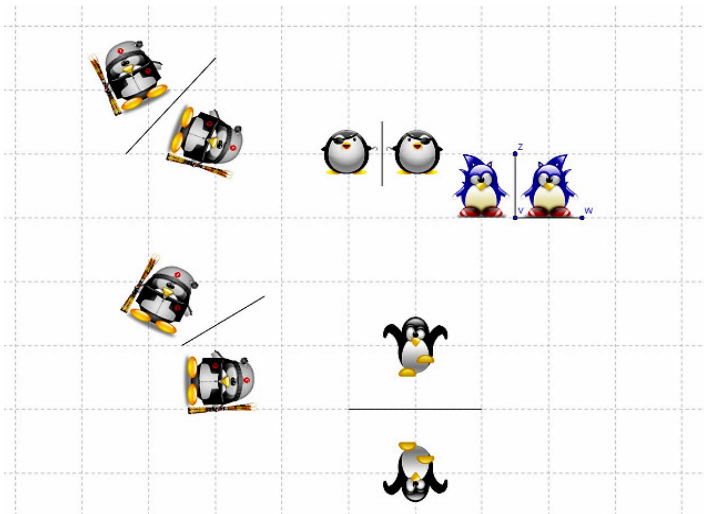


Fig. 37 - Resposta da Catarina à segunda alínea da primeira questão da tarefa II

Na última questão da tarefa II, onde se procurava um maior grau de formalismo na abordagem da noção de reflexão, a Catarina elaborou de forma adequada todas as reflexões propostas (ver figura 38). Para esta aluna, mesmo o caso em que o eixo de reflexão se encontrava numa posição oblíqua não constituiu qualquer situação de dificuldade. A verificação através do mira foi, uma mera formalidade (figura 38).

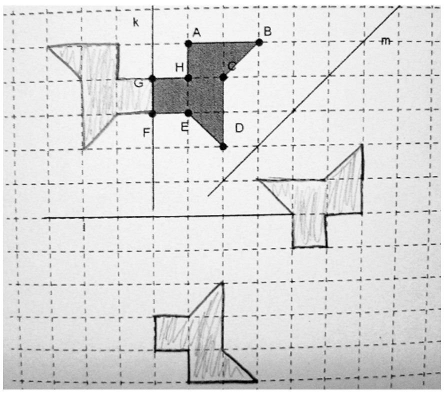


Fig. 38 - Resposta da Catarina à segunda questão da tarefa II

Constatou-se que a aluna parecia não sentir diferenças significativas na dificuldade das tarefas realizadas em "papel e lápis" e nas realizadas no GeoGebra. Pelo observado até ao momento, verificou-se que a Catarina utilizava frequentemente o "papel e lápis" para produzir ensaios prévios às suas abordagens no GeoGebra (Diário de Bordo, 18/04/2012).

Mais adiante ver-se-á, com outro caso, uma atitude muito diferente.

Tarefa III

Na abordagem, através do GeoGebra, da primeira questão da tarefa III, quando solicitada a realizar duas rotações de centro *C* para o mesmo polígono, com ângulos de rotação de + 120º e -120º, a aluna demonstrou também grande facilidade na sua resolução, como se pode observar na figura seguinte.

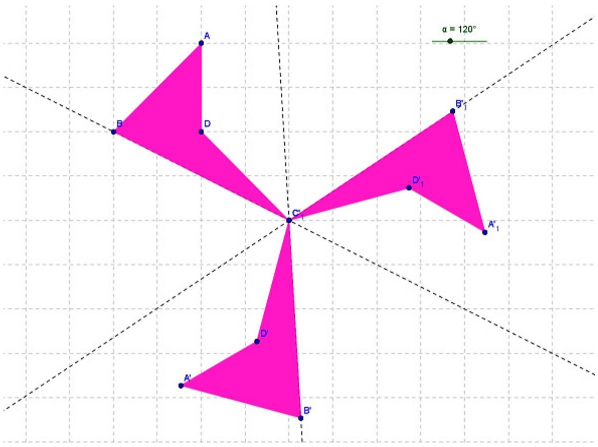


Fig. 39 - Resposta da Catarina à primeira questão da tarefa III

Na questão número dois desta tarefa, pedia-se que se realizasse o mesmo exercício num ambiente de "papel e lápis", com recurso a acetatos, transferidor e compasso. Observe-se, na figura seguinte, a "limpeza" com que foi alcançada a solução correta, e na total ausência de orientações fornecidas pelo professor (Diário de Bordo, 20/04/2012).

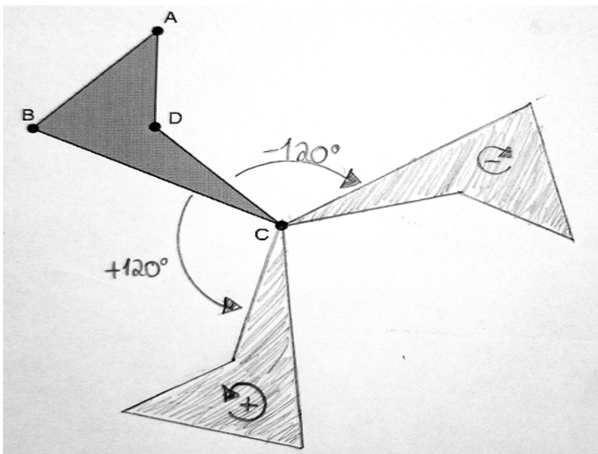


Fig. 40 - Resposta da Catarina à segunda questão da tarefa III

Na quarta questão, onde se solicitava a descrição do processo que deu origem a uma construção livre com rotações, no GeoGebra, (questão número três, analisada anteriormente), a aluna escreveu (ver figura seguinte):

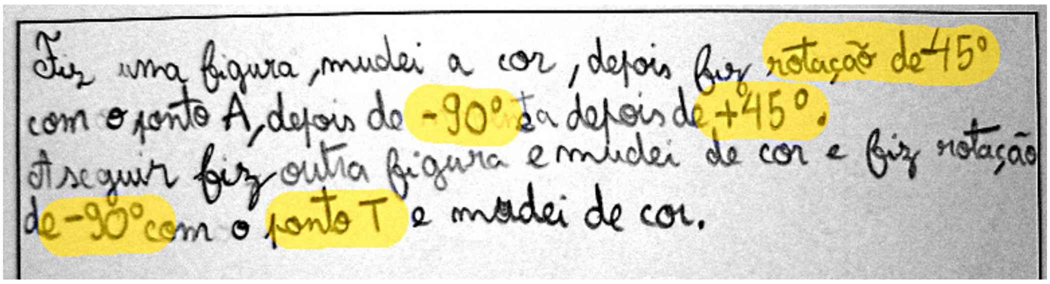

Fiz uma figura, mudei a cor, depois fiz rotação de 45° com o ponto A, depois de -90° e a depois de +45°. A seguir fiz outra figura e mudei de cor e fiz rotação de -90° com o ponto T e mudei de cor.

Fig. 41 - Descrição da Catarina do processo que deu origem a uma construção livre usando isometrias

Note-se a utilização, pela aluna, dos sinais **+** e **-** ao lado da medida da amplitude do ângulo de rotação. Estes alunos nunca tinham abordado, à data da realização deste estudo, números racionais que não fossem positivos. Veja-se, também, a correção na utilização da terminologia específica, identificando claramente a isometria utilizada, o centro (embora lhe chame ponto), a medida da amplitude e o sentido do ângulo associado.

Tarefa IV

Na primeira questão desta tarefa, onde se solicitou aos alunos que descobrissem um conjunto de vetores que davam origem a uma série de imagens geradas por translação de um dado objeto, a Catarina identificou estes vetores de forma autónoma. Neste caso, e ao contrário daquilo que tinha sido realizado na tarefa I, a aluna definiu, e por si própria, dois pontos distintos no objeto como referência. A aluna conseguiu também "transpor" os diferentes vetores para a área quadriculada em baixo. Note-se os dois pontos de referência assinalados nas asas do pinguim (ver figura seguinte).

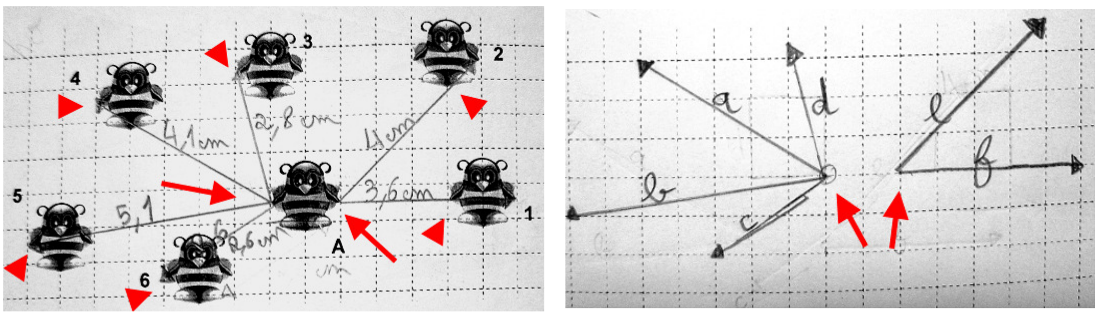


Fig. 42 - Resposta da Catarina à primeira alínea da primeira questão da tarefa IV

A aluna fez a caracterização dos vetores encontrados de forma bastante precisa e formal. Repare-se, também, na necessidade sentida pela aluna de medir, com uma régua, o comprimento de cada vetor (ver figura seguinte):

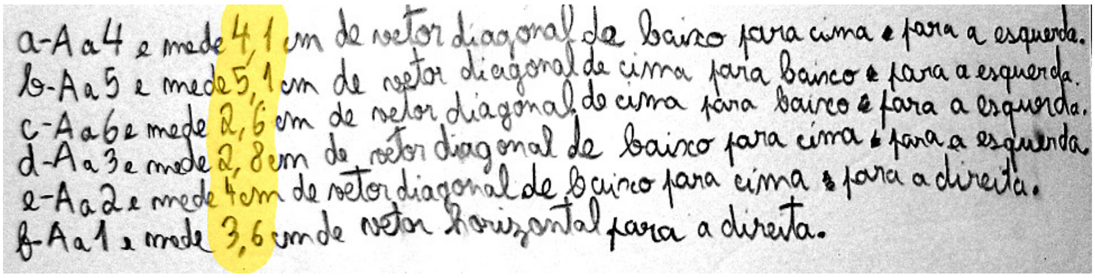

a-A a 4 e mede 4,1 cm de vetor diagonal de baixo para cima e para a esquerda.
b-A a 5 e mede 5,1 cm de vetor diagonal de cima para baixo e para a esquerda.
c-A a 6 e mede 2,6 cm de vetor diagonal de cima para baixo e para a esquerda.
d-A a 3 e mede 2,8 cm de vetor diagonal de baixo para cima e para a esquerda
e-A a 2 e mede 4 cm de vetor diagonal de baixo para cima e para a direita.
f-A a 1 e mede 3,6 cm de vetor horizontal para a direita.

Fig. 43 - Resposta da Catarina à segunda alínea da primeira questão da tarefa IV

Na segunda questão, na qual se solicitou que os alunos determinassem, em ambiente de "papel e lápis", a imagem de uma figura obtida por uma translação associada a um vetor oblíquo predefinido, a Catarina, resolveu facilmente o problema, assinalando e identificando corretamente as imagens dos pontos, como se pode observar na figura seguinte:

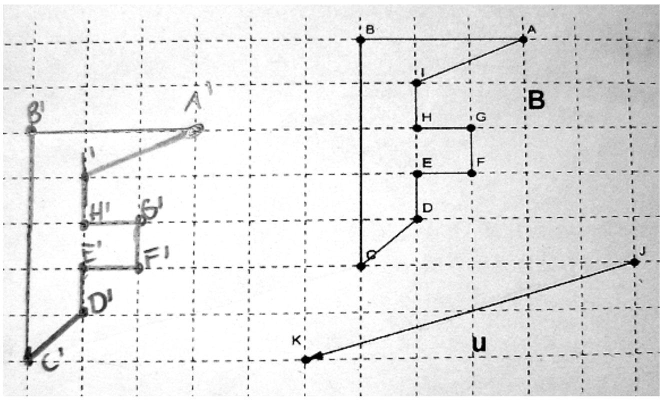


Fig. 44 - Resposta da Catarina à segunda questão da tarefa IV

Quando inquirida sobre o que aconteceria à imagem se se alterasse a medida de comprimento do vetor (questão 2.1) a aluna respondeu (Diário de Bordo, 23/04/2012):

-"...a imagem afasta-se ou aproxima-se conforme com o comprimento do vetor."

Sobre uma mudança na direção do vetor, respondeu:

-"A imagem desloca-se para outro sítio."

Tarefa V

Realizada no GeoGebra, a primeira questão da tarefa V, solicitava aos alunos que "deslocassem "o pinguim para "dentro de casa". A aluna, de forma semelhante ao que já fizera numa tarefa do pré-teste, primeiro simulou em "papel e lápis" todo o processo, tal como se pode observar na figura seguinte. Em seguida, passou então para o GeoGebra, onde reproduziu fielmente o seu ensaio no papel. É interessante verificar a necessidade que a aluna sentiu em utilizar o papel e o lápis previamente à abordagem computacional.

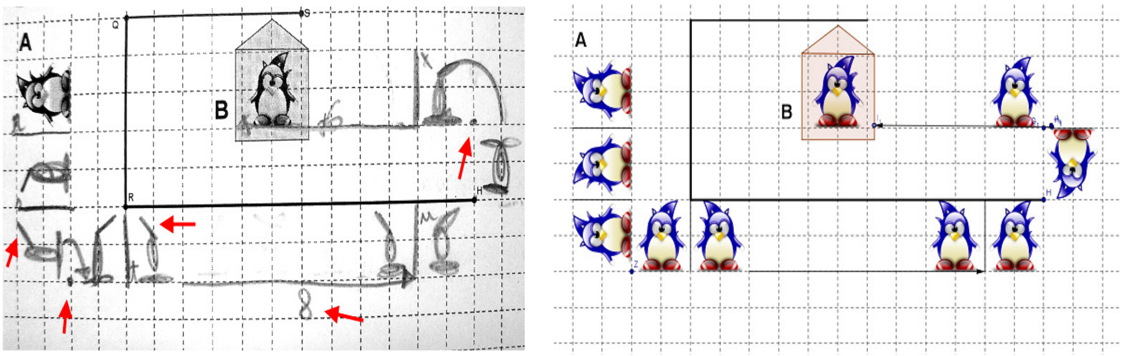


Fig. 45 - Resposta da Catarina à primeira alínea da primeira questão da tarefa V

Na descrição do processo pelo qual resolveu a questão anterior, a aluna escreveu o que se apresenta na figura seguinte:

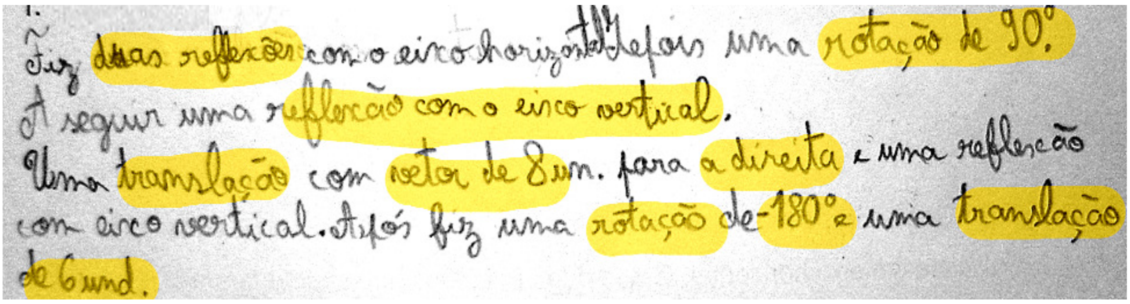

Fiz duas reflexões com o eixo horizontal depois uma rotação de 90°.
A seguir uma reflexão com o eixo vertical.
Uma translação com vetor de 8 un. para a direita e uma reflexão
com eixo vertical. Após fiz uma rotação de -180° e uma translação
de 6 und.

Fig. 46 - Descrição da Catarina do processo de resolução da primeira questão da tarefa V

A resposta dada a esta questão revela também um entendimento notável das isometrias envolvidas e uma grande capacidade de as descrever com bastante precisão e adequação em termos de terminologia. Note-se, novamente, a utilização dos sinais **-** e **+** para caracterizar o sentido de rotação.

Na segunda questão, realizada também no GeoGebra, os alunos eram convidados a descobrir soluções, num contexto de composição de isometrias, que permitiam obter uma imagem a partir de um objeto. Para a situação 1, a Catarina realizou uma meia-volta de centro ***O***. Na segunda situação, combinou uma translação com um vetor horizontal, com sentido da esquerda para a direita, com três quadrículas de medida de comprimento, seguida de uma reflexão de eixo horizontal (ver figura seguinte):

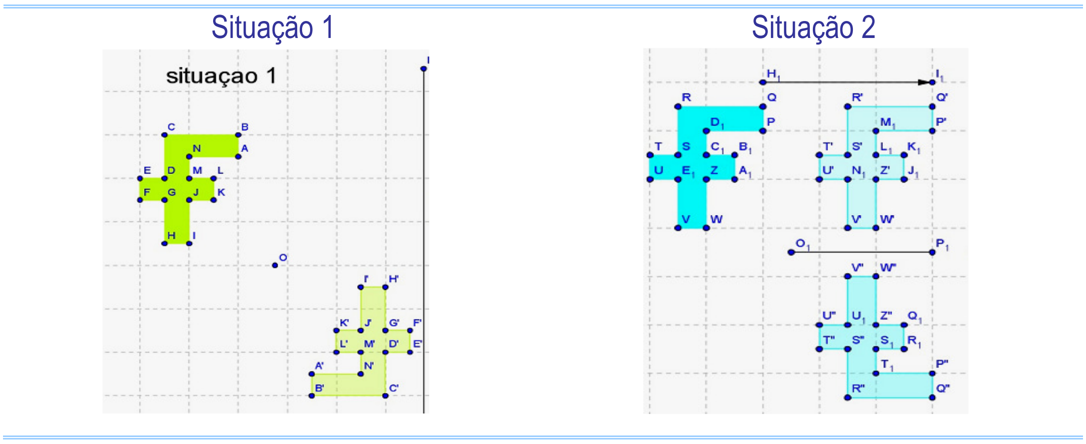


Fig. 47 - Resposta da Catarina à primeira alínea da segunda questão da tarefa V (1ª versão)

Como o que se pretendia, finalmente, era uma abordagem à reflexão deslizante e a solução proposta para a situação 2 não era convergente com esta linha, o professor solicitou à aluna que tentasse descobrir outras possibilidades para esta situação. A Catarina rapidamente descobriu outra alternativa (ver figura 48). Neste caso, propôs uma reflexão de eixo horizontal seguida de uma translação de vetor paralelo ao eixo de reflexão. Foi, então, introduzido o conceito de reflexão deslizante pelo professor.

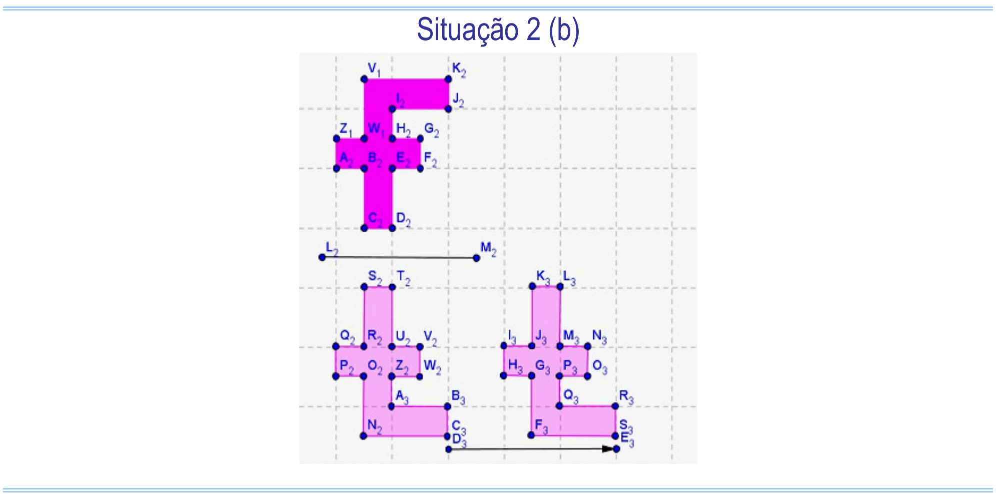


Fig. 48 - Resposta da Catarina à primeira alínea da segunda questão da tarefa V (2ª versão)

Quando solicitada a descrever os processos utilizados em cada situação escreveu o que se apresenta na figura seguinte:

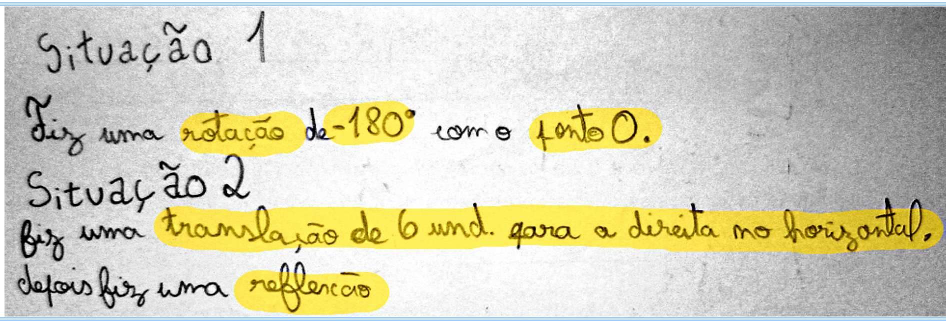
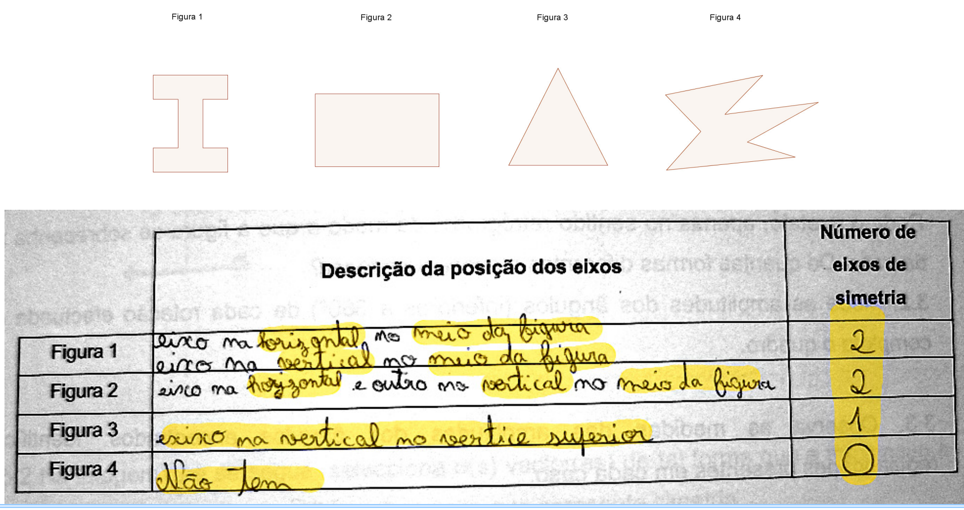

Situação 1
Fiz uma rotação de -180° com o ponto O.
Situação 2
fiz uma translação de 6 und. para a direita no horizontal.
depois fiz uma reflexão

Fig. 49 - Descrição da Catarina do processo de resolução da segunda questão da tarefa V (1ª versão)

Tarefa VI

Na tarefa VI abordava-se o conceito de simetria por reflexão e rotacional. A aluna revelou alguma confusão entre os conceitos de simetria e reflexão - achava tratar-se da mesma coisa. Refira-se que esta associação é muito comum, pelo que, antes de se avançar para a tarefa, se geraram várias discussões, sobretudo pela presença, no guião, de situações onde se representavam rotações. A aluna explorou, então, a primeira questão, em ambiente de "papel e lápis". Solicitava-se que, utilizando um mira, se encontrasse a posição de diferentes eixos de reflexão que deixassem a figura invariante. Solicitava-se, também, que preenchessem um quadro onde indicavam o número de eixos que tinham sido encontrados (eixos de simetria) e onde descreviam sucintamente a sua posição (ver figura seguinte):



	Descrição da posição dos eixos	Número de eixos de simetria
Figura 1	eixo na horizontal no meio da figura eixo na vertical no meio da figura	2
Figura 2	eixo na horizontal e outro na vertical no meio da figura	2
Figura 3	eixo na vertical no vertice superior	1
Figura 4	Não tem	0

Fig. 50 - Resposta da Catarina à segunda alínea da primeira questão da tarefa VI

Verifica-se que a aluna concluiu facilmente que a figura 4 não tinha qualquer eixo que obedecesse às condições estipuladas.

-*"...professor, aqui não existe nenhum,...não há.!"* (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Quando inquirida sobre o número de eixos que esperava encontrar no caso do círculo, respondeu sem hesitações que era infinito (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Chegou-se à discussão, que envolveu a turma, sobre esta definição de simetria, enfatizando-se que, neste caso, acontecia por reflexão, mas que poderia acontecer com outras transformações.

Na questão seguinte, confirmava-se, no GeoGebra, os resultados alcançados no "papel e lápis". A manipulação dos elementos do ficheiro previamente preparado, que confirmava a abordagem inicial era, a esta altura da implementação da sequência didática, de grande simplicidade para os alunos, na sua generalidade (Diário de Bordo, 30/04/2012), e para esta aluna em particular (ver figura seguinte).

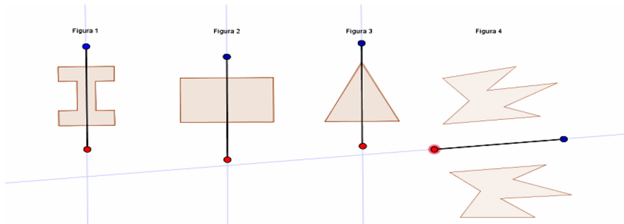
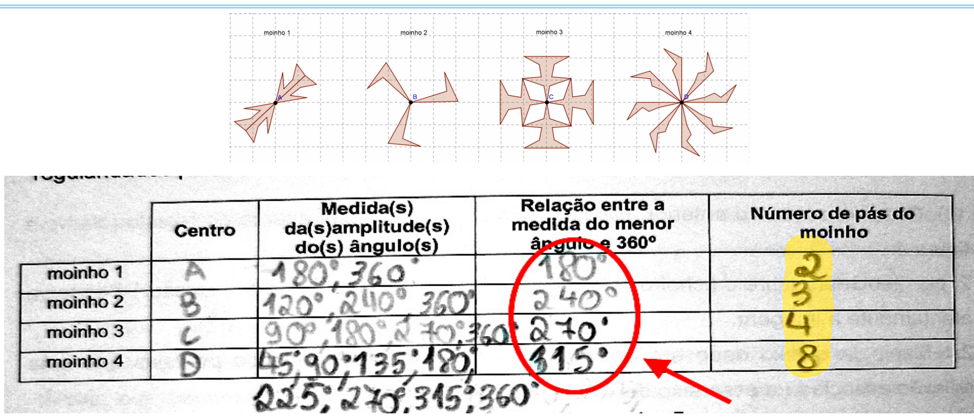


Fig. 51 - Manipulação de elementos na primeira alínea segunda questão da tarefa VI

Na terceira questão, ao averiguar, para quatro "moinhos" e em ambiente de "papel e lápis", que rotações deixavam as figuras invariantes, a aluna, numa analogia com a questão anterior, chegou também com assinalável facilidade à noção de simetria rotacional. Esta aluna, neste momento não apresentava qualquer dificuldade em manipular o transferidor (Diário de Bordo, 30/04/2012). No final preencheu o quadro que se apresenta na figura seguinte:



	Centro	Medida(s) da(s)amplitude(s) do(s) ângulo(s)	Relação entre a medida do menor ângulo e 360º	Número de pás do moinho
moinho 1	A	180°; 360°	180°	2
moinho 2	B	120°; 240°; 360°	240°	3
moinho 3	C	90°; 180°; 270°; 360°	270°	4
moinho 4	D	45°; 90°; 135°; 180°; 225°; 270°; 315°; 360°	315°	8

Fig. 52 - Resposta da Catarina à segunda alínea da terceira questão da tarefa VI

Como se pode observar na figura 52, a relação entre a medida do menor ângulo e 360º não foi estabelecida, pelo menos de forma formal e clara pela aluna. No entanto, algumas anotações numa folha de rascunho merecem uma análise mais atenta (veja-se a figura seguinte).

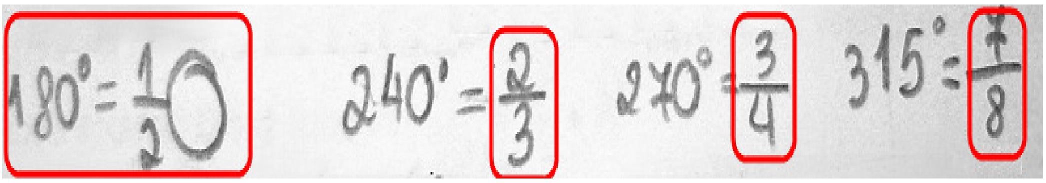


Fig. 53 - Anotações da Catarina sobre as relações entre a medida da amplitude do menor ângulo e 360º

Estas anotações parecem mostrar que a aluna percebeu que, para o moinho 1, o ângulo menor tinha metade da amplitude de 360º (desenha um círculo). Curiosamente, se se analisar as frações escritas pela aluna, percebe-se imediatamente que a fração complementar representa, para cada caso, a relação requerida, onde o denominador traduz o número de pás do moinho, o que é verdadeiramente surpreendente.

Durante a discussão coletiva acerca da forma como se poderia escrever uma expressão numérica que traduzisse a medida de amplitude de todos os ângulos associados às rotações que permitiam que as figuras apresentassem simetria, a Catarina redigiu estas relações e mostrou-as ao professor de forma discreta (ver figura 54), evitando "revelar cedo demais" a solução (Diário de Bordo, 02/05/2012).

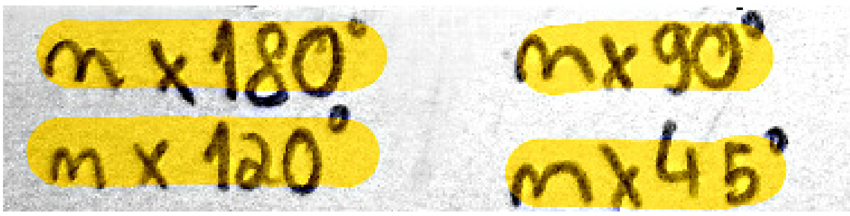


Fig. 54 - Anotações da Catarina sobre as expressões algébricas

Na questão seguinte, pedia-se a confirmação deste trabalho no GeoGebra. Este processo, enormemente facilitado pelo uso dos "seletores", permitiu também consolidar algumas noções (ver figura 55).

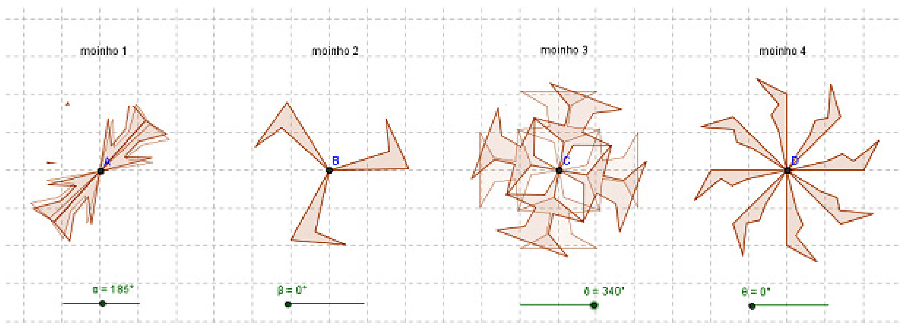


Fig. 55 - Manipulação de elementos na terceira alínea da terceira questão da tarefa VI

Tarefa VII

Centrada no conceito de simetria translacional, a primeira questão da tarefa VII solicitava aos alunos o desenho de um vetor que, aplicado a uma imagem (friso da figura 56), a deixasse também invariante.

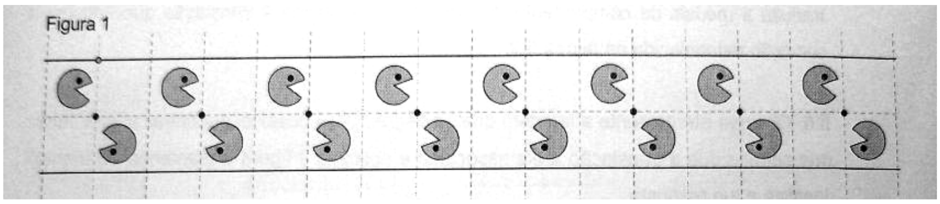


Fig. 56 - Friso proposto na primeira questão da tarefa VII

A Catarina desenhou um vetor horizontal, com sentido da esquerda para a direita, com 2 quadrículas de comprimento. A aluna, durante a exploração feita em ambiente de "papel e lápis", dispensou a utilização de um acetato, ao contrário da maioria dos alunos da turma. Parece mais uma evidência da sua capacidade de visualização. Veja-se um comentário seu às características deste vetor na figura seguinte:

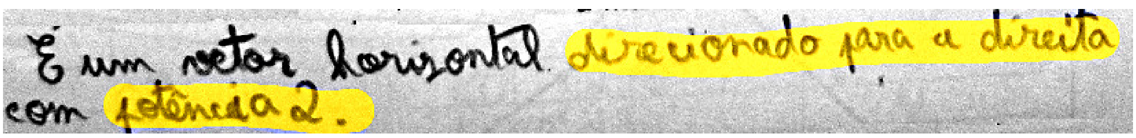


Fig. 57 - Comentário da Catarina como resposta à primeira alínea da primeira questão da tarefa VII

A aluna percebe, também, a ideia de manter a figura inicial invariante e, na questão seguinte, onde tinha de escolher, de uma lista, um conjunto de vetores que aplicados à imagem a mantivessem invariante, descartou imediatamente todos os vetores não horizontais. O vetor **n**, com sentido da direita para a esquerda, também não lhe resultou estranho (ver figura seguinte).

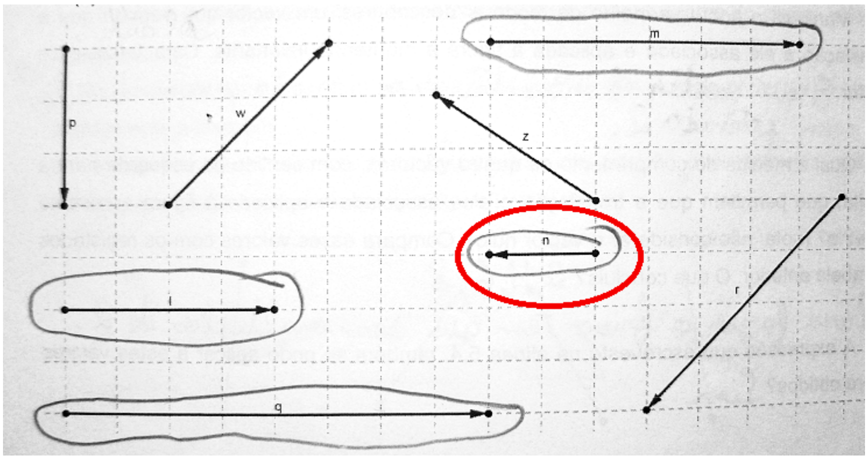


Fig. 58 - Resposta da Catarina à segunda alínea da primeira questão da tarefa VII

Na questão seguinte, os resultados foram sintetizados pela Catarina num quadro fornecido para o efeito conforme se mostra na figura seguinte.

Vector	Direcção	Sentido	Medida de comprimento do vector
m	para a direita	horizontal	6
n	para a esquerda	horizontal	2
q	para a direita	horizontal	8
l	para a direita	horizontal	4

Fig. 59 - Resposta da Catarina à terceira alínea da primeira questão da tarefa VII

Da observação da última coluna, relativa à medida de comprimento dos vetores, a aluna percebeu que se tratava de números pares e escrever com êxito a expressão algébrica que os definia não constituiu dificuldade (Diário de Bordo, 04/05/2012).

Na alínea seguinte, estabeleceu também, facilmente, que nenhum vetor poderia manter a nova figura invariante, tal como se observa na imagem seguinte:

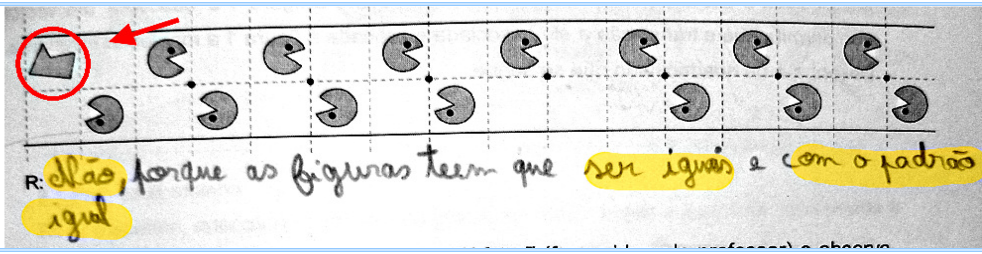


Fig. 60 - Resposta da Catarina à quinta alínea da primeira questão da tarefa VII

A exploração desta questão aconteceu depois de uma explicação mais ou menos formal sobre as diferentes maneiras de se obter um friso, com referências ao seu módulo e motivo. Observe-se a utilização, por parte da aluna, do termo "padrão".

As questões seguintes desta tarefa, análogas às abordadas em "papel e lápis", solicitavam agora o uso do GeoGebra para sua resolução. A Catarina realizou-as sem qualquer dificuldade (Diário de Bordo, 07/05/2012).

1.1.3. Pós-Teste

Da análise da resposta à primeira questão do pós-teste, verifica-se que a aluna responde corretamente, identificando a posição do eixo da única possível reflexão, efetuando algumas tentativas, possivelmente por dobragem, come se observa na figura seguinte.

Reflexão

1. Dos pinguins em seguida representados, descobre qual deles é uma imagem obtida por reflexão do pinguim **A**. Traça o respetivo eixo de reflexão.

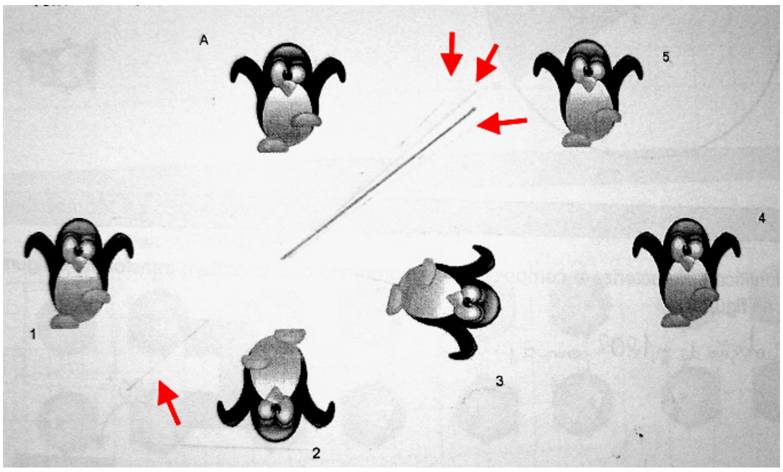


Fig. 61 - Resposta da Catarina à primeira questão do pós-teste

Relativamente à segunda questão, na qual se solicitou aos alunos que desenhassem os vetores associados a três translações, a Catarina fê-lo também corretamente e sem aparente dificuldade (ver figura seguinte):

Translação

2. As figuras 6, 7 e 8 foram obtidas por translações da figura B. Descobre, para cada translação, o vetor aplicado. Representa-os na área quadriculada à direita.

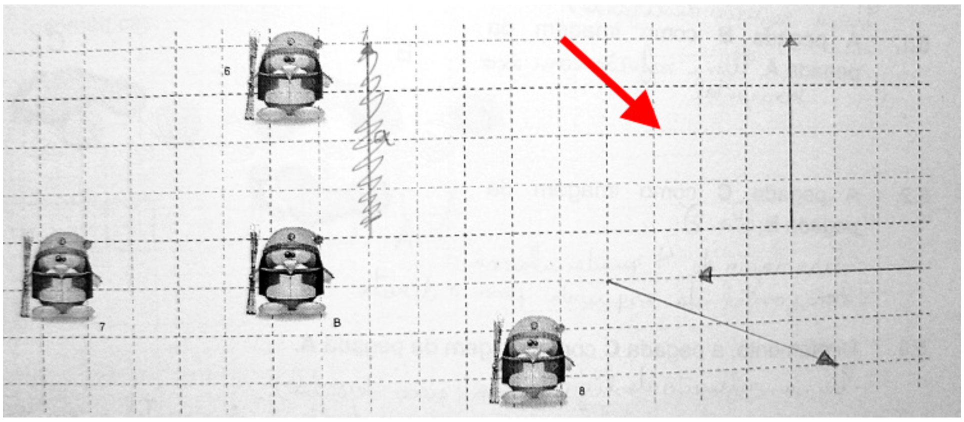


Fig. 62 - Resposta da Catarina à segunda questão do pós-teste

Quando se observam as respostas à questão número três, verifica-se também uma resposta sucinta mas correta (ver figura seguinte):

Rotação

3. Na imagem que se segue, o ponto **O** é o centro do círculo. Os arcos **AC**, **CD** e **BD** são congruentes. Caracteriza a rotação que transforma a figura **1** na figura **2**.

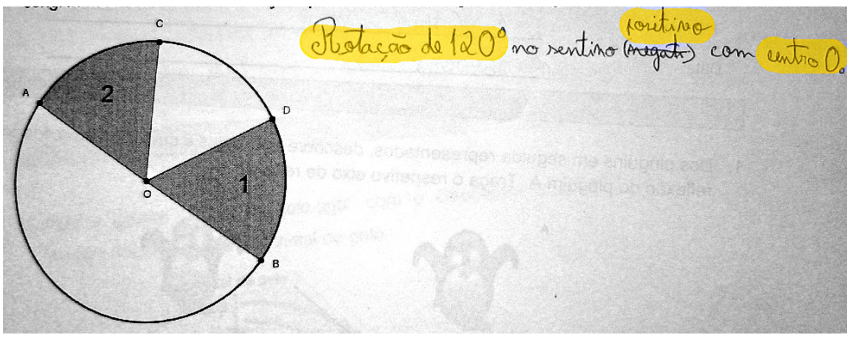


Fig. 63 - Resposta da Catarina à terceira questão do pós-teste

Na quarta questão, a Catarina parece tentar inicialmente uma composição de isometrias, tal como solicitado no enunciado (figura 64). Finalmente apaga o trabalho realizado e opta por propor uma meia-volta, com o centro definido em ***O*** - uma solução direta mas que não preenche as condições estipuladas no enunciado.

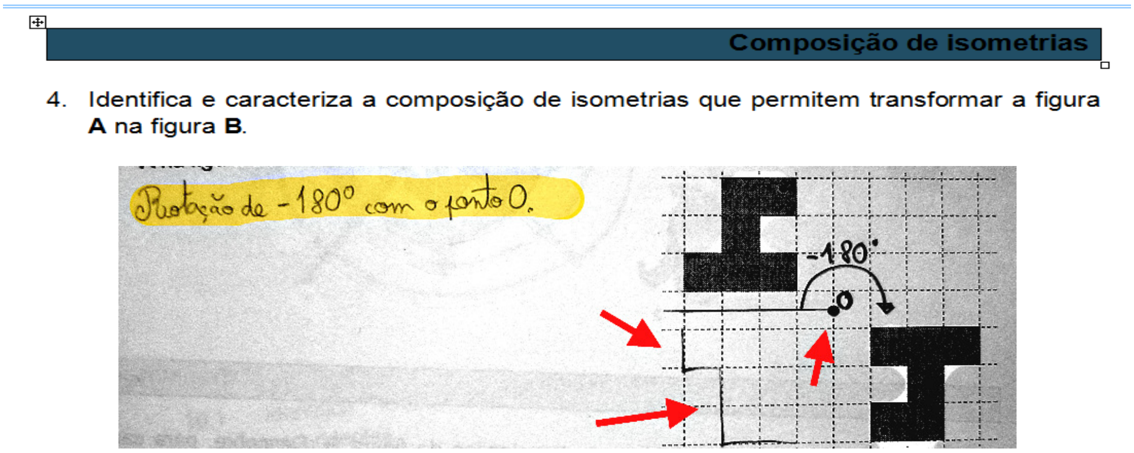


Fig. 64 - Resposta da Catarina à quarta questão do pós-teste

Quando se observa a resposta à pergunta número cinco (ver figura 65), constata-se um grau de "acerto" muito elevado e praticamente sem incorreções ou omissões no discurso. A Catarina identifica e caracteriza corretamente todas as isometrias envolvidas. Observe-se a utilização do termo *"potência"* relativamente à medida de comprimento do vetor.

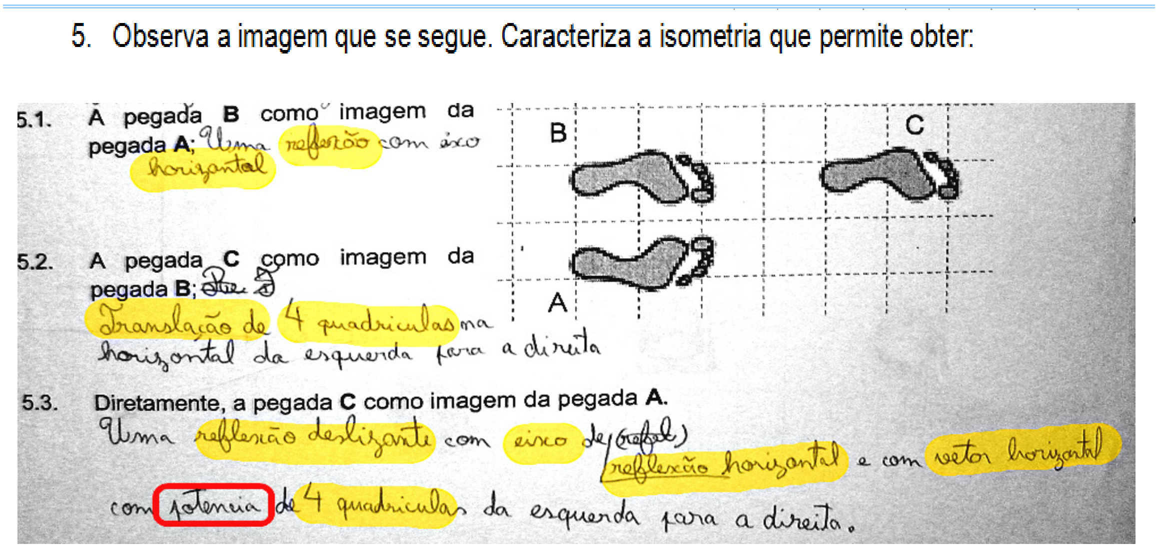


Fig. 65 - Resposta da Catarina à quinta questão do pós-teste

A questão número seis foi resolvida no computador com recurso ao GeoGebra.

A Catarina optou por uma solução muito simples mas extraordinariamente eficaz para "transportar" o pinguim para casa. A aluna definiu um seletor para controlar a amplitude de um ângulo de rotação no sentido negativo e um centro de rotação no ponto **Z**. Em seguida, manipulou o seletor até alcançar 90º e o centro de rotação para fazer o pinguim "entrar em casa". A figura seguinte mostra uma sequência de imagens que ilustram o descrito.

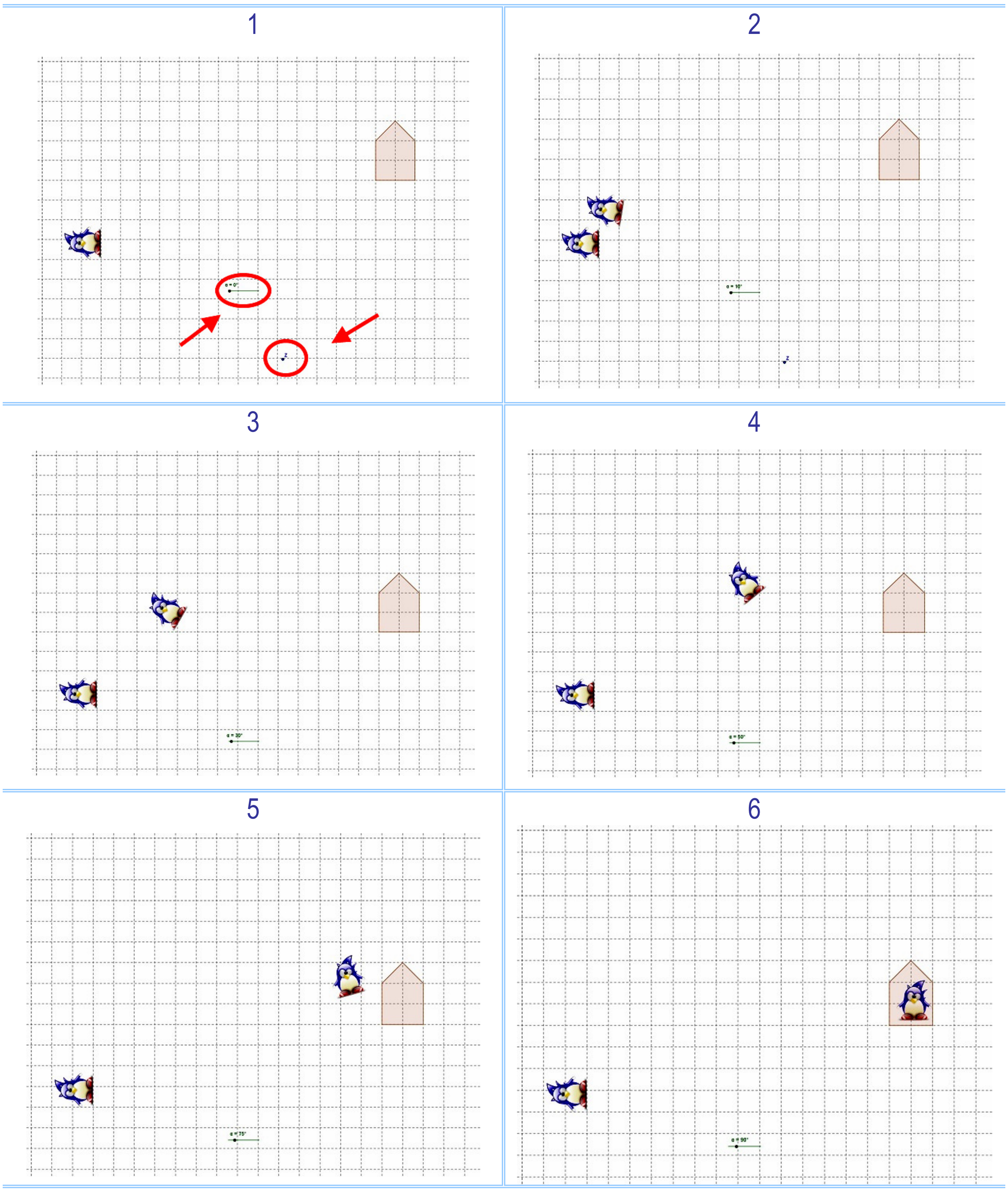


Fig. 66 - Sequência de imagens da resposta da Catarina à sexta questão do pós-teste

A aluna descreve o processo da seguinte forma:

-"Fiz um seletor e um centro de rotação no ponto ***Z****. Apliquei uma rotação no ponto* ***Z*** *e pus o seletor em 90º, no sentido negativo. Mexi na posição do centro para por o Tux dentro de casa."*

Na resposta à sétima questão do pós-teste, na qual se solicitou aos alunos que descrevessem duas formas distintas de obter um dado friso, a aluna começou por identificar o módulo no friso, conforme se pode observar na figura seguinte:

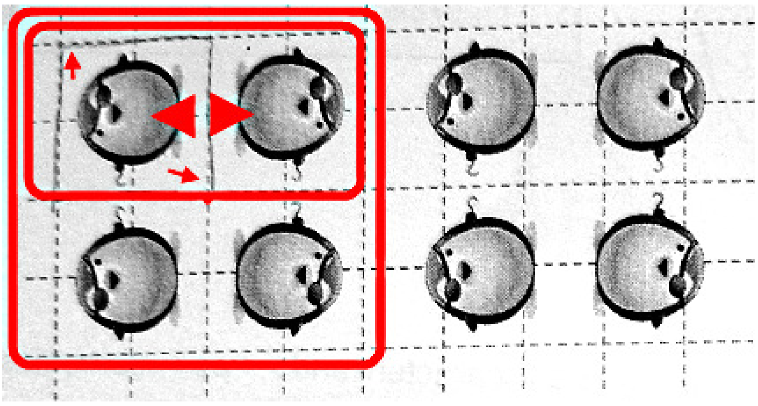
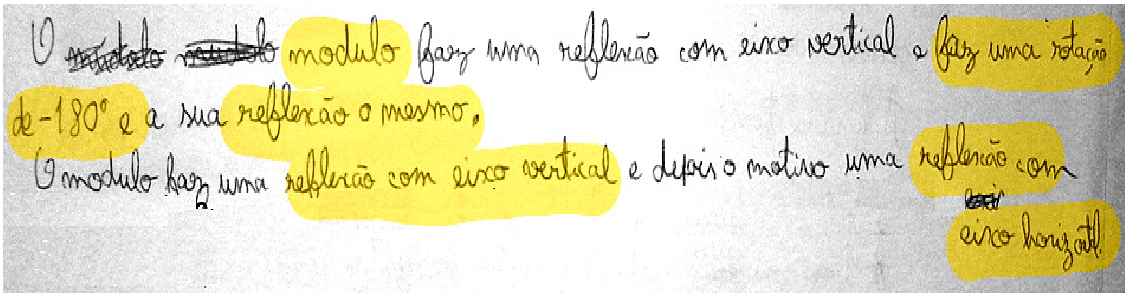


Fig. 67 - Anotações da Catarina no friso da sétima questão do pós-teste

Em seguida, a aluna escreveu aquilo que se pode ver na figura seguinte:



O ~~motivo~~ ~~modulo~~ modulo faz uma reflexão com eixo vertical e faz uma rotação de -180º e a sua reflexão o mesmo,
O modulo faz uma reflexão com eixo vertical e depois o motivo uma reflexão com eixo horizontal

Fig. 68 - Descrição da Catarina sobre os modos de obtenção do friso da sétima questão do pós-teste

Apesar de um discurso algo confuso, no texto é possível perceber que a aluna se refere, na primeira situação, a uma reflexão de eixo vertical seguida de uma meia-volta, gerando-se um motivo de quatro pinguins. Na segunda situação, propôs também uma reflexão vertical do módulo, seguida de uma reflexão de eixo horizontal para formar o motivo. Omitiu apenas a aplicação de translações sucessivas ao motivo para gerar o friso.

Na pergunta número oito, ao criar no papel, utilizando diferentes isometrias, uma "composição de figuras geométricas", a Catarina optou pela construção de um friso, de forma bastante interessante e não menos original (ver figura seguinte):

8. Cria livremente, utilizando diferentes isometrias, uma composição de figuras geométricas.

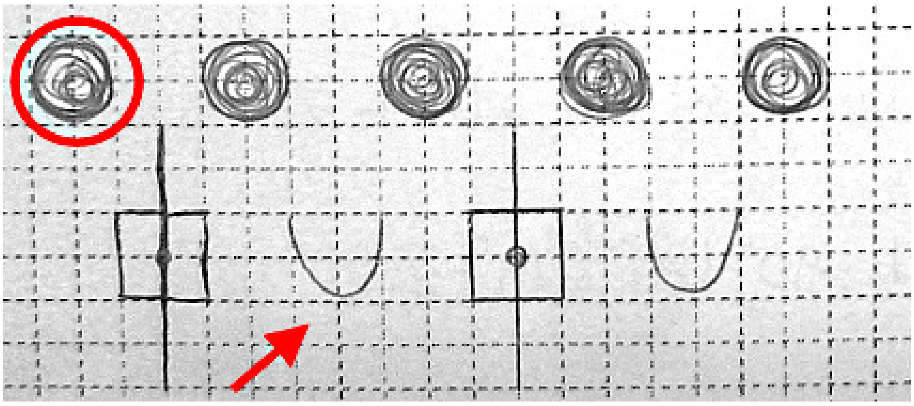


Fig. 69 - Resposta da Catarina à oitava questão do pós-teste

Repare-se na utilização de elementos curvos como o círculo (que designa como bola) e como o arco, a que se referiu interessantemente como *"reta torta",* conforme se pode observar na figura seguinte.

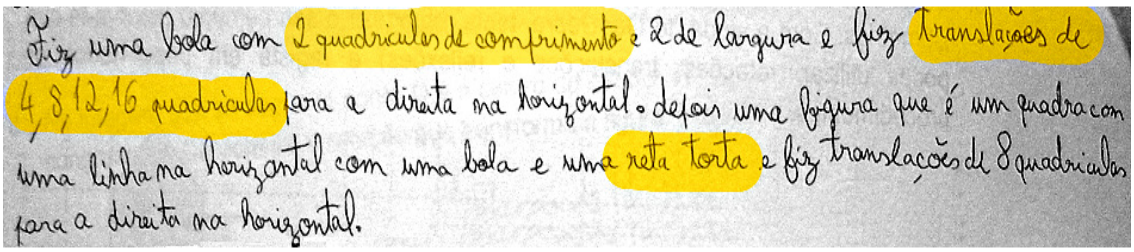

Fiz uma bola com 2 quadriculas de comprimento e 2 de largura e fiz translações de 4, 8, 12, 16 quadriculas para a direita na horizontal. depois uma figura que é um quadrado com uma linha na horizontal com uma bola e uma reta torta e fiz translações de 8 quadriculas para a direita na horizontal.

Fig. 70 - Resposta da Catarina à nona questão do pós-teste

Na última questão do pós-teste, relacionada com o conceito de simetria e realizada no computador, a aluna identificou e caracterizou corretamente as quatro reflexões e rotações que permitiam à figura permanecer invariante. A linguagem utilizada foi bastante formal como pode ver-se na figura seguinte.

10.1 Identifica todas as simetrias da figura caracterizando as isometrias correspondentes.

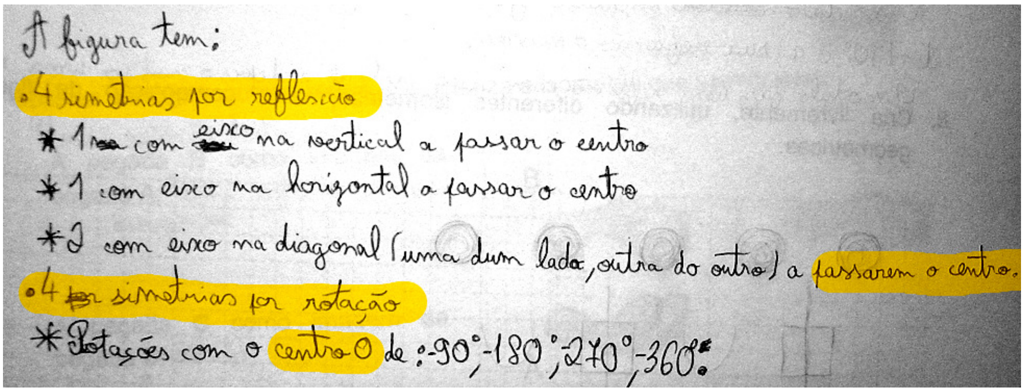

A figura tem:
• 4 simetrias por reflexão
* 1 com eixo na vertical a passar o centro
* 1 com eixo na horizontal a passar o centro
* 2 com eixo na diagonal (uma dum lado, outra do outro) a passarem o centro.
• 4 simetrias por rotação
* Rotações com o centro O de: -90°, -180°, 270°, -360°.

Fig. 71 - Resposta da Catarina à décima questão do pós-teste

Esta aluna foi a única que não omitiu a posição do centro de rotação, assinalando-o convenientemente na imagem que constava no enunciado.

Na tabela seguinte mostra-se os resultados comparativos, para esta aluna, no teste efetuado - modalidade pré e pós.

Questões	Cotação	Catarina	
		Pré-teste	**Pós-teste**
Questão 1 - reflexão	10	4	**10**
Questão 2 - translação	10	0	**10**
Questão 3 - rotação	10	0	**10**
Questão 4 - composição	8	0	**6**
Questão 5.1 - reflexão	6	3	**4**
Questão 5.2 - translação	6	0	**6**
Questão 5.3 - ref. deslizante	6	0	**6**
Questão 6 - cmp. iso. ADGD	8	8	**8**
Questão 7 - frisos	8	0	**7**
Questão 8 - construção livre	8	0	**8**
Questão 9 - descrição	10	0	**10**
Questão 10 - simetria	10	3	**10**
	Totais:	18	**95**

Tabela 18 - Resultados da Catarina ao pré e pós-teste (%)

Da análise desta tabela, constata-se uma evolução muito significativa ao nível do conhecimento e capacidades matemáticos relacionados com o tópico em questão. A Catarina, que apresentava, no início deste estudo, um perfil de uma aluna de nível 5, consolidava a sua posição neste nível.

Ao analisar as respostas da aluna à IV secção do Questionário Final, observa-se um grau de concordância máximo, na forma como foi implementado o tópico, na compreensão do que são isometrias, na formação dos frisos e no entendimento do conceito de simetria. Justificou que *"...aprendemos a ver as isometrias"; "....aprendemos a ver a simetria..."; "...somos nós que fazemos os frisos e assim sabemos como fazer através da experiência".* A Catarina manifestou a sua forte concordância que aprofundou outros conhecimentos de Geometria e que desenvolveu a sua capacidade de resolver problemas. A aluna referiu também que:

-"...interagimos com o GeoGebra e ficamos a entender como se forma a geometria!"; "...ajuda-nos muito" .

1.2. Criatividade

A Catarina elaborou e apresentou trabalhos com uma originalidade excecional, quase todos muito diferentes dos propostos pela maioria dos seus colegas de turma. Como pode observar-se na resposta desta aluna à quarta questão da tarefa I, constata-se uma abordagem muito pouco convencional, e que propõe dois trabalhos distintos (ver figura seguinte).

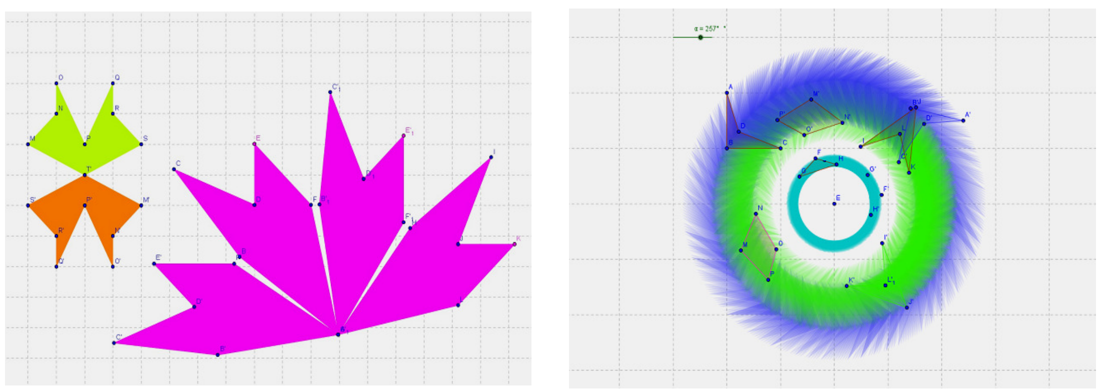


Fig. 72 - Respostas[1] da Catarina à quarta questão da tarefa I

[1] Sobre o uso da cor, em termos rigorosamente matemáticos, a construção deveria ser monocromática. Atendento a que se trata de uma construção dos alunos e deste nível de escolaridade aceitou-se o seu uso em todos os casos.

A primeira abordagem, à esquerda na imagem, mostra um trabalho baseado na reflexão e na rotação de polígonos. A aluna, revelava celeridade e desenvoltura nos processos, que lhe permitiam explorar outras formas de resolver os problemas propostos. Consequentemente, realizou uma segunda abordagem, depois da exibição para toda a turma, de produções marcadamente "diferentes" de outros alunos. Observe-se o uso de um seletor animado e "ativação do traço". A construção assenta numa série de rotações, em torno do ponto ***C***, de alguns polígonos em cuja fronteira predominam o azul e o verde. Este trabalho foi exibido em grande plano para toda a turma, causando espanto e admiração. Estas abordagens revelavam-se inspiradoras para os restantes colegas, que se motivavam e esforçavam no sentido de criar trabalhos mais originais (Diário de Bordo, 16/04/2012).

Na terceira questão da tarefa III, na qual se solicitava uma construção livre envolvendo apenas rotações, a Catarina realizou novamente dois trabalhos (ver figura 73). À esquerda na imagem pode-se verificar, numa linha mais convencional, uma série de rotações de polígonos controladas por seletores. À direita, constatamos algo inteiramente novo e singular. A aluna fez rotações de polígonos em torno de dois pontos, animando o seletor para fazer variar a amplitude do ângulo de rotação, ativando o traço e preenchendo o fundo do polígono com uma imagem que retirou da Internet.

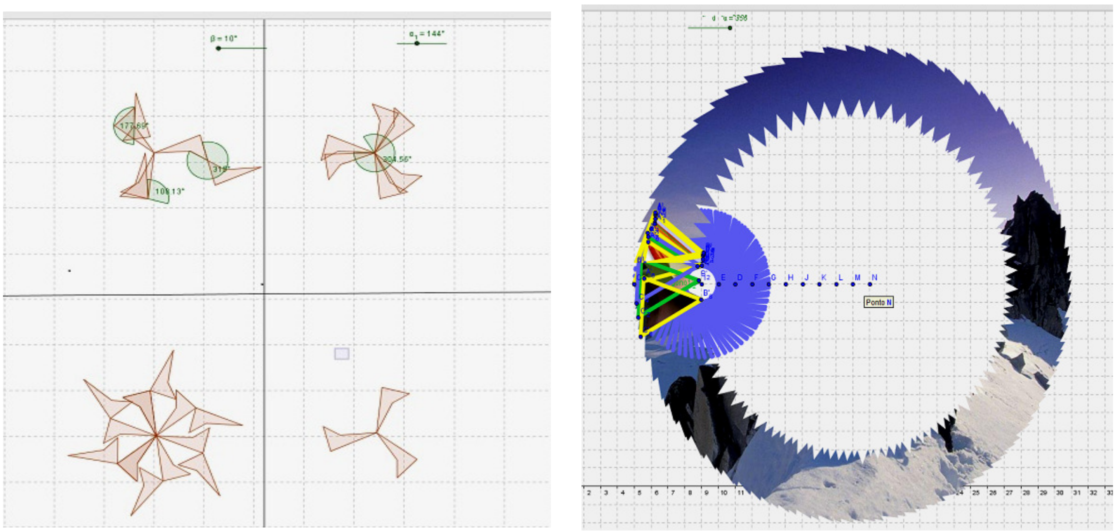


Fig. 73 - Resposta da Catarina à terceira questão da tarefa **III**

Trata-se de uma produção de grande originalidade pois nenhum outro aluno desta ou de outras turmas realizou algo semelhante. A aluna apreciava a exibição do seu trabalho que, neste caso particular, provocou, pela sua espetacularidade, aplausos espontâneos. Esta aluna, em contraponto com outros grupos, não revelava um espírito muito recetivo às sugestões de colegas embora ouvisse com atenção os comentários do professor e tentasse incorporar essas ideias nos seus processos (Diário de Bordo, 20/04/2012).

Na questão número três da tarefa IV, centrada na translação, a aluna realizou novamente dois trabalhos de grande simplicidade mas recheados de detalhes (ver figura 74). Se, na primeira abordagem, utilizou apenas uma translação associada a um vetor diagonal, usando diversos polígonos para representar uma pessoa e um barco na água, na segunda construção conjugou uma reflexão inicial de eixo horizontal com uma translação associada a um vetor vertical. Foi a primeira e única vez que um aluno realizou uma translação vertical (Diário de Bordo, 23/04/2012). Note-se a disposição "simétrica" da construção.

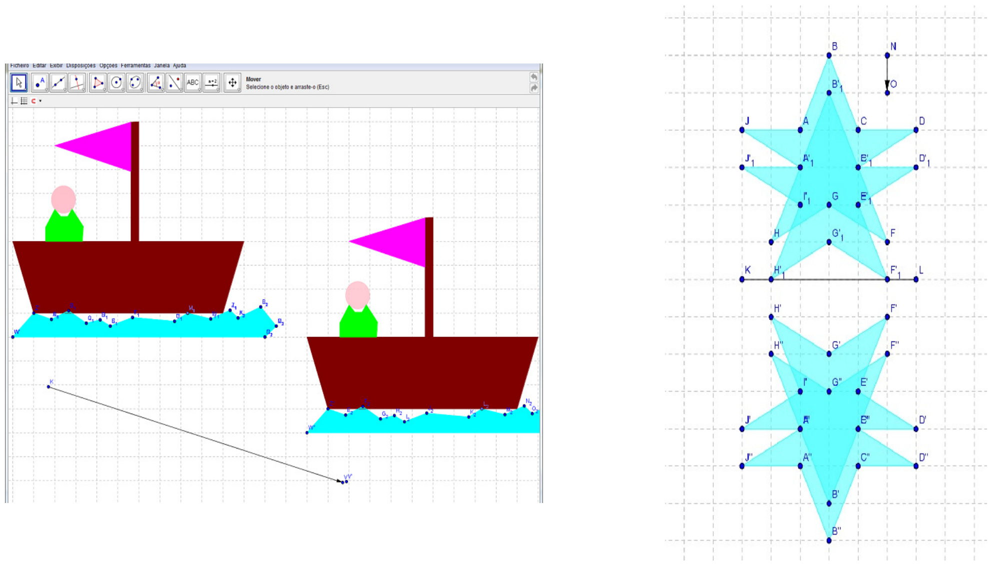
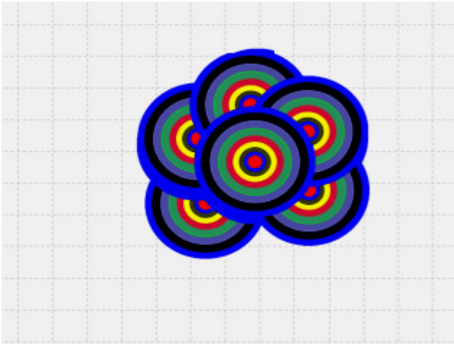
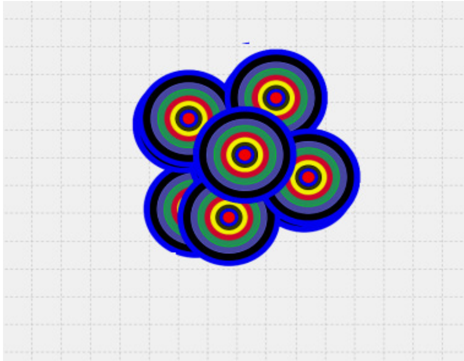
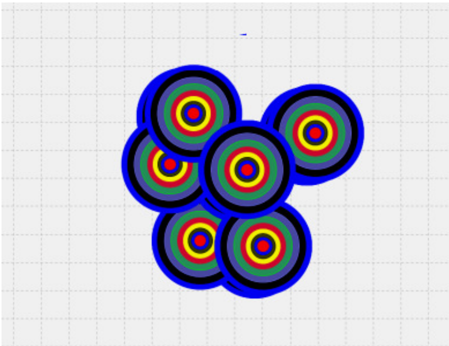
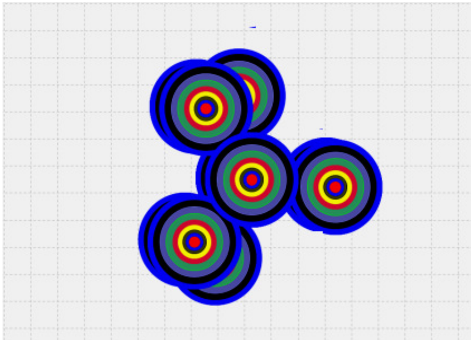
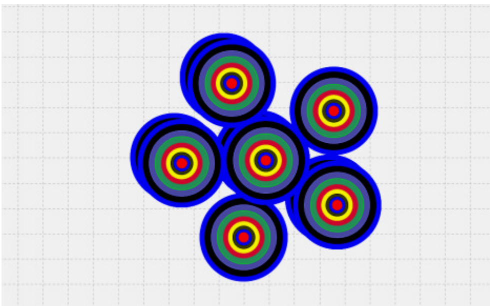
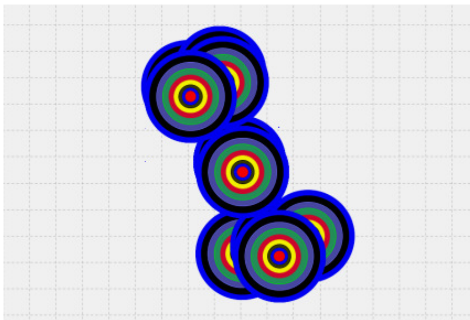
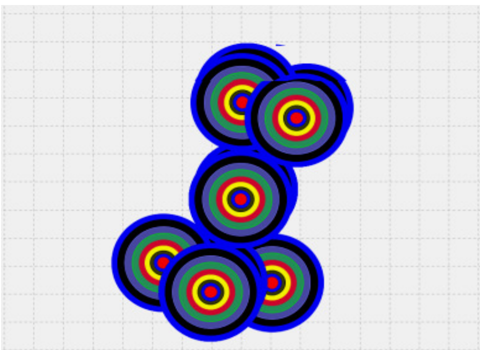
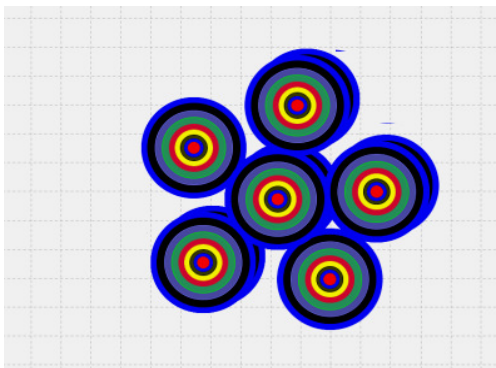


Fig. 74 - Resposta da Catarina à terceira questão da tarefa IV

O contraste com as abordagens mais "convencionais" realizadas pela maioria dos alunos da turma, que se limitava a aplicar uma translação a um qualquer polígono, era evidente.

Na terceira questão da tarefa V, a Catarina realiza o que, sem margem para dúvidas, resultou ser o trabalho mais criativo que tive oportunidade de observar neste estudo. A sequência de imagens que se segue tenta mostrar esse trabalho:

1	2
	
3	**4**
	
5	**6**
	
7	**8**
	

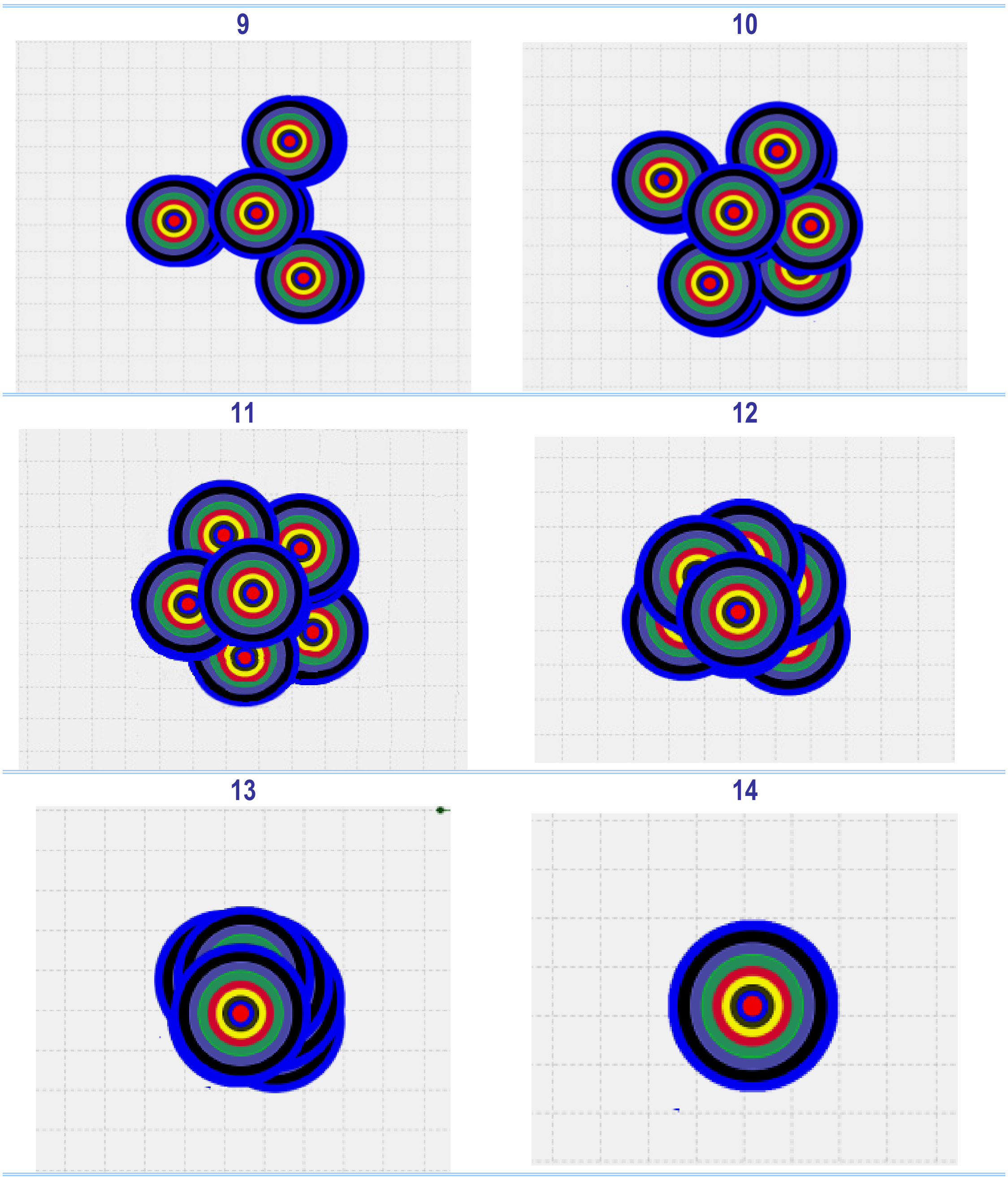


Fig. 75 - Sequência de imagens relativas à resposta da Catarina à terceira questão da tarefa V

A aluna concebeu uma "entidade" animada, formada por vários círculos concêntricos que se desdobram sucessivamente através de rotações em série, definidas em pontos sobre as circunferências. O resultado é verdadeiramente deslumbrante. Neste trabalho, de grande criatividade, recorre a múltiplas ideias e conceções e revela uma grande capacidade de as adaptar e conjugar entre si. Demonstra também originalidade, fluência e flexibilidade. A projeção em grande plano deste trabalho provocou admiração em todos os presentes (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Na questão número quatro da tarefa VI, centrada na noção de simetria, a aluna realizou também duas abordagens, ambas de grande simplicidade, mas igualmente criativas (ver figura seguinte):

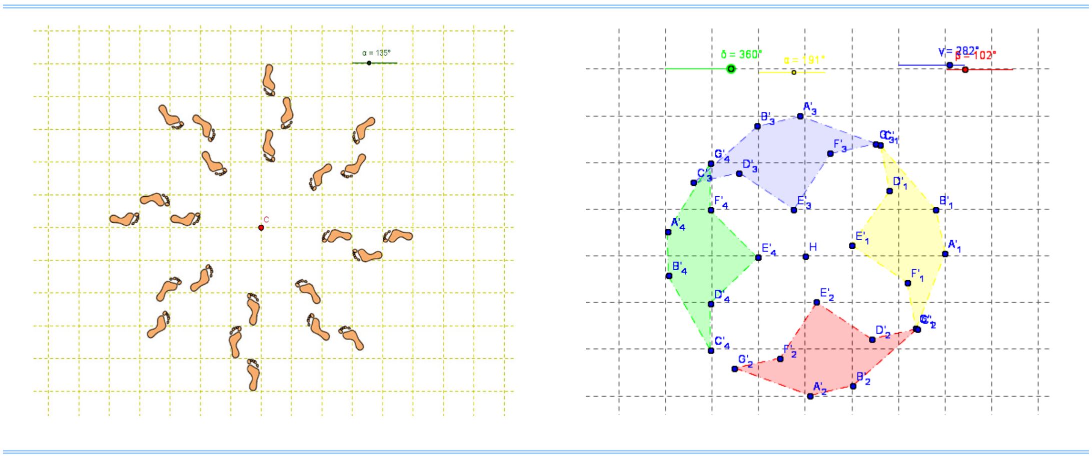


Fig. 76 - Resposta da Catarina à quarta questão da tarefa VI

Observe-se, nos dois trabalhos, a existência de múltiplas simetrias rotacionais, proporcionadas por rotações em série, controladas por um único seletor, e também de simetrias por reflexão.

Na questão número quatro da tarefa VII, a Catarina produziu um friso a partir de um módulo que retrata uma baleia, com recurso à "ferramenta polígono". O motivo está elaborado a partir de uma reflexão de eixo horizontal aplicada à baleia. Aplicou, em seguida, diversas translações (ver figura seguinte).

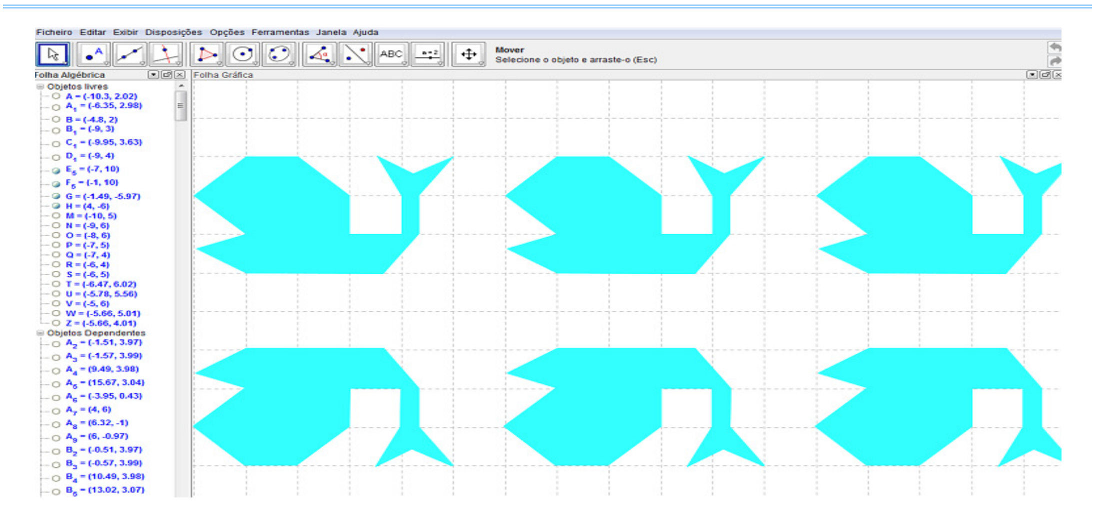


Fig. 77 - Resposta da Catarina à quarta questão da tarefa VII

A análise deste caso legitima a ideia de que, o uso do GeoGebra, ao facilitar enormemente o trabalho com as transformações geométricas, permite aumentar os níveis de fluência e flexibilidade nos alunos. O grau de originalidade dos trabalhos também aumentou, embora esta diferença, em termos de criatividade dos produtos das tarefas realizadas em "papel e lápis" e no GeoGebra, não seja, neste caso, tão vincada como nos casos analisados mais adiante, sobretudo no segundo. Constatou-se também a necessidade da aluna recorrer, frequentemente, e em alguns casos de forma prévia, ao "papel e lápis" como método para resolver os problemas. O domínio e entendimento muito sólido das noções envolvidas parece ter permitido à aluna desenvolver múltiplas estratégias, que resultaram em várias abordagens à mesma questão, produzindo produtos diversos com diferentes níveis de originalidade.

A aluna mostrou também um verdadeiro apreço pelos comentários elogiosos feitos por colegas e professor, sobretudo no reconhecimento que faziam à qualidade do seu trabalho. Este facto teve implicações motivacionais significativas nesta aluna que, diversas vezes e de forma espontânea, se levantava para ajudar os seus colegas de outros grupos de trabalho.

Da análise às respostas desta aluna à III secção do Questionário Final, relativa à criatividade, verificamos que a aluna manifestou forte concordância que as tarefas "tradicionais" limitam a criatividade dos alunos e que aulas de Matemática criativas são essenciais para melhorar a sua aprendizagem. A aluna declarou considerar-se, agora, mais criativa. Referiu ainda discordar de que ser criativo seja difícil, que as tarefas propostas não contribuíram para desenvolver a sua criatividade e que observar os trabalhos de outros alunos a levou a poder ser mais criativa, referindo, no entanto, que sentiu necessidade de ser mais criativa. A aluna expressou também a sua forte concordância de que gostar da tarefa a realizar aumenta a sua criatividade e que é possível avaliar e treinar a criatividade nos alunos. A aluna manifestou o seu desacordo com a afirmação que não imaginava que fosse possível produzir trabalho criativo a Matemática.

À pergunta sobre se as tarefas propostas teriam sido criativas, responde que sim e justifica:

As tarefas propostas nas aulas foram criativas? Justifica.	
Catarina:	"Sim... fizemos frisos e outras construções com isometrias ao nosso estilo."

Quadro 6 - Resposta da Catarina sobre a natureza criativa das tarefas

Quando questionada sobre se os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos, responde também afirmativamente referindo-se ao facto de o professor lhes prestar atenção:

Os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos? Justifica.	
Catarina:	"Sim... quando o trabalho era diferente, e era feito por nós, toda a gente o via!"

Quadro 7 - Resposta da Catarina sobre a valorização dos trabalhos criativos dos alunos

Quando inquirida sobre o que achava que distinguia um trabalho criativo de outro pouco criativo, a Catarina mencionou o facto de ser diferente e indica as cores e as formas como aspectos distintivos.

1.3. Atitudes Face à Matemática

A aprendizagem da Matemática está intimamente relacionada com a atitude dos alunos relação à mesma. Estudos teóricos e empíricos, assim como a praxis escolar quotidiana, sugerem que muitos alunos percebem a Matemática como uma entidade demasiado complexa, que provoca sentimentos de ansiedade e intranquilidade dando origem, frequentemente a frustrações e atitudes negativas face à escola (González-Pienda et al., 2002; Núñez et al., 2005).

As considerações que se seguem, resultam do cruzamento de dados, obtidos a partir do Diário de Bordo e da análise das respostas ao Questionário Inicial e ao Questionário Final, secção V, relativa ao domínio atitudinal dos alunos face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular, da aluna Catarina.

Como se pode constatar fruto da observação direta e de conversas informais e do registo de alguns episódios no Diário de Bordo, a Catarina manteve ao longo deste estudo uma atitude confiante, observável na sua forma de estar e atuar na resolução das tarefas. Além de revelar um grande interesse e envolvimento nas atividades, dispunha-se, frequentemente, a ajudar qualquer colega que aparentasse a mínima dificuldade.

Quando inquirida, no Questionário Final, sobre as implicações da forma como foi abordado o tópico, através do recurso ao GeoGebra, numa visão mais positiva da Geometria e da Matemática, a aluna expressou uma forte concordância com este aspecto. A seguir sintetizam-se as suas justificações.

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para uma visão mais positiva da Geometria porque...	
Catarina:	"Sim... porque podemos inventar coisas no computador, a trabalhar!"

Quadro 8 - Resposta da Catarina sobre impacto da abordagem do tópico no desenvolvimento de uma visão mais positiva da Geometria

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para uma visão mais positiva da Matemática porque...	
Catarina:	"Sim... pois podemos estar no computador a trabalhar de forma diferente."

Quadro 9 - Resposta da Catarina sobre o impacto da abordagem do tópico no desenvolvimento de uma visão mais positiva da Matemática

Esta aluna, recorde-se, tinha declarado, no início deste estudo empírico que, apesar de gostar de Matemática, não gostava de Geometria pois considerava-a aborrecida. Parece existir, portanto, uma alteração substancial na sua visão sobre esta área da Matemática.

A Catarina, a dada altura da implementação da sequência didática, parecia divertir-se verdadeiramente com as a tarefas (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências), o que parece confirmar-se quando se observa a resposta da aluna ao Questionário Final, quando referiu discordar que a abordagem tenha contribuído para tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora.

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora...	
Catarina:	"Não... os problemas, o GeoGebra, o mira, é muito divertido."

Quadro 10 - Resposta da Catarina sobre a abordagem do tópico e a possibilidade de a Geometria se tornar mais aborrecida e desmotivadora

A aluna canalizava a sua disponibilidade e entusiasmo para explorações alternativas e com resultados espetaculares, quer ao nível do número de abordagens que produzia, quer na originalidade das respostas que encontrava:

-*"...posso fazer de outra maneira?"*- perguntava por vezes (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências).

Como já se viu, a Catarina declarou considerar-se muito boa a Matemática. Esta competência percebida sobre si própria só peca por modesta. A aluna era, na verdade, extraordinária. Esta visão positiva de si mesma determinava, de forma igualmente positiva, a sua forma de encarar as aulas de Matemática. O facto de as aulas de Geometria se terem "transferido" para o laboratório TIC, e se ter optado por uma abordagem diferente dos tópicos provocou, ao fim de algum tempo, que a Catarina fosse abandonando uma certa visão negativa no que à Geometria diz respeito.

-*"...realmente, isto não é só sólidos geométricos";*

- *"...a simetria não é nada daquilo que eu pensava."*

-*"...isto é muito giro!"* (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências).

A aluna sentia-se extremamente motivada para o sucesso à disciplina, colocando dúvidas com frequência, inclusivamente, abordando o professor na sala de professores, no bar da escola ou nos corredores, muitas vezes sobre aspectos culturais e históricos da Matemática:

-"Professor, o que é o número de ouro?" - perguntou numa abordagem ansiosa "de corredor" (Diário de Bordo, 27/04/2012).

Revelava, também, um certo prazer por saber-se "a melhor aluna a Matemática" da turma. Mais tarde, ganhou o "Canguru Matemático", ficando nos dez primeiros lugares, a nível nacional.

Mantinha, também, espetativas elevadas quanto ao seu futuro, pois queria ser médica (fonte: Projeto Curricular de Turma), e tinha noção da importância da disciplina no prosseguimento dos seus estudos. O professor, em tom de brincadeira dizia-lhe que se deveria dedicar à Física Teórica como Einstein ou Newton, do que, achando imensa graça, discordava amavelmente, sentindo-se, simultaneamente, lisonjeada e agradecida.

Quando questionada sobre se a abordagem a ajudou a desenvolver o seu pensamento geométrico, a Catarina manifestou plena concordância e justificou da seguinte maneira:

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para desenvolver o pensamento geométrico...	
Catarina:	"Sim...porque fazemos coisas novas e utilizamos isometrias para as fazer!"

Quadro 11 - Resposta da Catarina sobre a relação entre a forma como foi implementado o tópico e o desenvolvimento do pensamento geométrico

A aluna admitiu uma evolução do seu pensamento geométrico. Note-se, na sua na resposta, a utilização do termo "novas". Realmente, o tópico já tinha sido abordado no primeiro ciclo. O que era verdadeiramente novo, era a forma como foi implementado e os produtos resultantes das tarefas. A Catarina, como já se viu, declarou também que se sentia agora mais criativa. Estas respostas sugerem que o nível da competência percebida para a aprendizagem aumentou.

A aluna, nas respostas ao Questionário Final, manifestou também um alto grau de concordância quando declarou que os seus receios face à disciplina diminuíram e que o seu interesse pela disciplina aumentou porque referiu entender melhor a matéria e achou tudo mais divertido e simples. A aluna, durante as aulas, nunca revelou ansiedade que comprometesse o seu desempenho. Manifestou, sim, um grande entusiasmo pelas aulas de Matemática.

Em síntese, pode-se afirmar que:

- o envolvimento, interesse e entusiasmo pela Matemática mantiveram-se em níveis elevados, aumentando, até, para o caso da Geometria;
- a competência percebida para a aprendizagem aumentou.

2. O Caso Tiago e Luísa

O grupo 2 era formado pelo Tiago e pela Luísa. Ambos os alunos tinham 11 anos à data da implementação deste estudo e tinham tido nível 3 a Matemática, no ano letivo anterior, nível que foi mantido pela Luísa nos dois primeiros períodos do ano em que decorreu este estudo mas não pelo Tiago, pois tinha descido para um aproveitamento insatisfatório. Ambos eram esforçados e interessados apesar de pouco participativos. O Tiago revelava alguns problemas de autoestima e a Luísa de autoconfiança. No Questionário Inicial, o Tiago afirmou não gostar de Matemática, enquanto a Luísa respondeu o contrário. Ambos declararam que se consideravam alunos razoáveis à disciplina, que tinham computador em casa com ligação à Internet que gostavam de usar, admitindo um nível de conhecimento médio na sua utilização. O Tiago referiu fazê-lo de forma frequente, sobretudo para fins lúdicos e como ferramenta de comunicação. A Luísa assinalou que fazia uma utilização esporádica, como ferramenta de estudo mas também de comunicação. Ambos declararam saber manipular pastas e ficheiros em diferentes suportes, o que se confirmou também aquando da realização do teste de competências tecnológicas, e referiram já ter trabalhado no GeoGebra previamente, pois nos dois primeiros períodos do ano letivo foram feitos pequenos trabalhos nas disciplinas de Matemática e EVT com recurso a esta aplicação. Sobre o gosto pela Geometria, o Tiago, apesar de manifestar que a considerava importante, declarou não gostar porque lhe parecia demasiado confusa e que os professores não eram suficientemente explícitos nesta área. A Luísa respondeu que considerava a Geometria importante, e que gostava da temática porque lhe parecia divertida e lhe dava a possibilidade de trabalhar com materiais e instrumentos, lamentando o facto de nunca o ter feito através de computadores.

Inquiridos, ainda no Questionário Inicial, acerca das suas representações sobre a criatividade, os alunos manifestaram ideias essencialmente convergentes sobre a temática. À questão acerca do significado sobre o que era ser criativo, os dois alunos expressaram a ideia da criação de um trabalho original. A Luísa foi mais longe ao achar que esse trabalho deveria ser valorizado pelos outros.

O que significa para ti ser criativo?	
Tiago:	"... é criar coisas novas e originais."
Luísa	"... é inventar uma coisa muito original, mas as pessoas têm de gostar."

Quadro 12 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre o significado de criatividade

Quando interrogados acerca das áreas em que pensavam ser possível ser criativo, o Tiago referiu a construção de textos e EVT. A Luísa acrescentou a moda mas não fez referência à construção de texto. Curiosamente, nenhum deles referiu a música apesar de serem alunos do ensino articulado do conservatório.

Em que áreas pensas que é possível ser criativo?	
Tiago:	"... a escrever composições e em EVT."
Luísa	"... a EVT e na moda."

Quadro 13 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre as áreas em que é possível ser criativo

Os dois alunos assinalaram que era possível ser-se criativo a Matemática e, enquanto o Tiago se referiu aos processos de resolução de problemas para justificar a sua resposta, a Luísa afirmou que a Matemática talvez tivesse muitas coisas novas para descobrir.

Os dois alunos declararam que se consideravam criativos, que a criatividade era passível de ser desenvolvida e avaliada e que discordavam que estivesse relacionada com a idade. Tiago, ao contrário da Luísa, assinalou que era um dom raro, possuído apenas por algumas pessoas. Luísa manifestou concordância com o papel limitador exercido pela escola sobre a criatividade e assinalou discordar acerca desta ser uma característica individual, ao contrário do Tiago neste último aspecto. Ambos declararam concordar que a criatividade era uma capacidade fundamental e que aulas de Matemática criativas são essenciais para o seu desenvolvimento.

Quando inquiridos sobre os modos de trabalho em sala de aula, ambos os alunos responderam que preferiam trabalhar em pequeno grupo devido à possibilidade que este lhes oferecia de debater ideias e sugestões.

2.1. Conhecimento e Capacidades Geométricos

Nesta secção pretende-se, como já se referiu para o caso anterior, verificar se e como os alunos realizaram a respetiva apropriação de conhecimentos e evoluíram nas capacidades de reconhecer, visualizar, representar e transformar formas geométricas assim como, de comunicar, raciocinar e resolver problemas, utilizando, quer o "ambiente de papel e lápis", quer GeoGebra.

Pretende-se avaliar, para os alunos Tiago e Luísa, impacto dessa abordagem criativa. Para tal cruzaram-se, novamente, os dados resultantes da observação das aulas com a informação obtida através das produções dos alunos, dos registos efetuados no Diário de Bordo e do teste. Refira-se que o teste, nas suas modalidades pré e pós, foi analisado de forma individual para cada aluno (ver critérios de classificação do teste– Anexo 14), em oposição às tarefas da sequência didática que foram realizadas conjuntamente pelos dois. Pretendia-se, com esta opção, avaliar com maior rigor, o grau de conhecimento geométrico efetivamente alcançado por cada interveniente.

2.1.1. Pré-Teste

Como se pode observar pelas imagens que se seguem, extraídas da primeira questão do pré-teste, e apesar da Luísa possuir uma noção intuitiva de reflexão na sua associação à existência de um eixo, o conceito estava praticamente ausente. Os eixos traçados pela aluna parecem sugerir mais uma noção de simetria do que propriamente uma reflexão. O Tiago assinalou uma imagem errada e não evidencia quaisquer conhecimentos sobre a isometria, em geral, e sobre o eixo em particular.

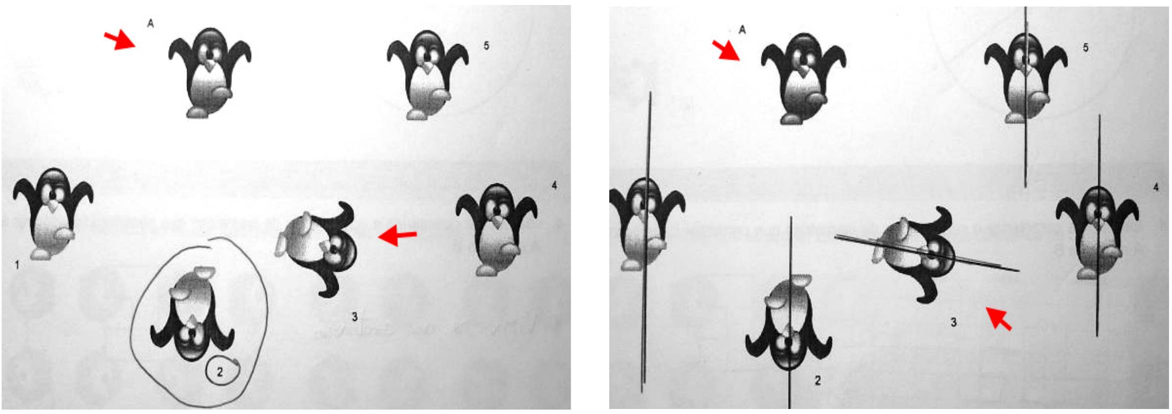


Fig. 78 - Resposta do Tiago (à esquerda) e da Luísa (à direita) à primeira questão do pré-teste

Portanto, nenhum dos alunos resolveu a questão de forma bem sucedida.

Nenhum dos dois respondeu às questões dois, três e quatro do pré-teste. Na questão número cinco, na qual se pedia para caracterizar uma reflexão, uma translação e uma reflexão deslizante, a Luísa ensaiou corretamente, para as duas primeiras, os nomes das isometrias envolvidas mas não as caracterizou. O Tiago não respondeu. Nenhum dos dois alunos fez qualquer outro ensaio de resposta a qualquer outra questão do pré-teste.

2.1.2. Implementação da Sequência Didática

Tarefa I

Na resolução da primeira tarefa, na qual se solicitava aos alunos que investigassem algumas "transformações", utilizando acetatos, miras, transferidores, compassos e réguas, e depois da ocorrência da já mencionada (ver caso anterior) discussão recordatória da abordagem às isometrias efetuada no Primeiro Ciclo, o grupo resolveu, de forma expedita, as situações que representavam reflexões. Observando a imagem seguinte, constata-se que os alunos traçaram corretamente o eixo de reflexão e utilizaram já terminologia adequada na caracterização da isometria apesar de um nível de formalismo inerente a esta tarefa ser ainda muito baixo.

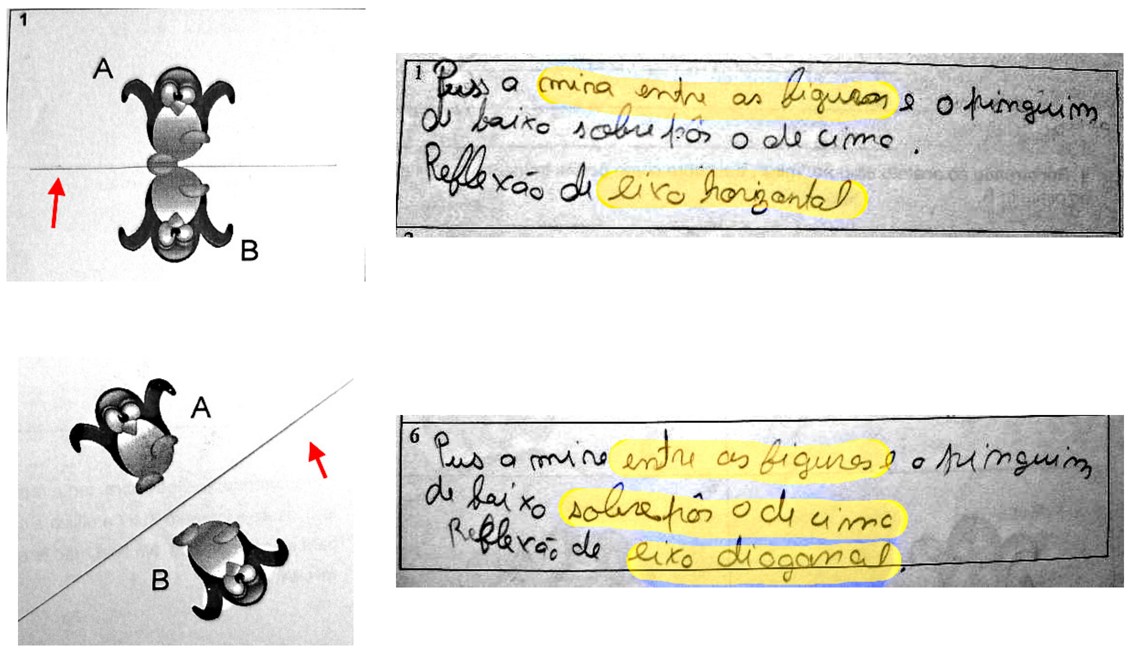


Fig. 79 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira e segunda questão da tarefa **I** - Reflexões

O grupo identificou também as figuras que continham rotações, o que foi conseguido recorrendo a um acetato. Já a caracterização destas rotações não se revelou tão simples (ver figura seguinte) pois os alunos evidenciaram imensas dificuldades no estabelecimento dos ângulos e na sua correspondente medição. Os alunos ainda necessitaram de ajuda para determinar o centro de rotação e efetuar as medições necessárias com o transferidor (Diário de Bordo, 16/04/2012).

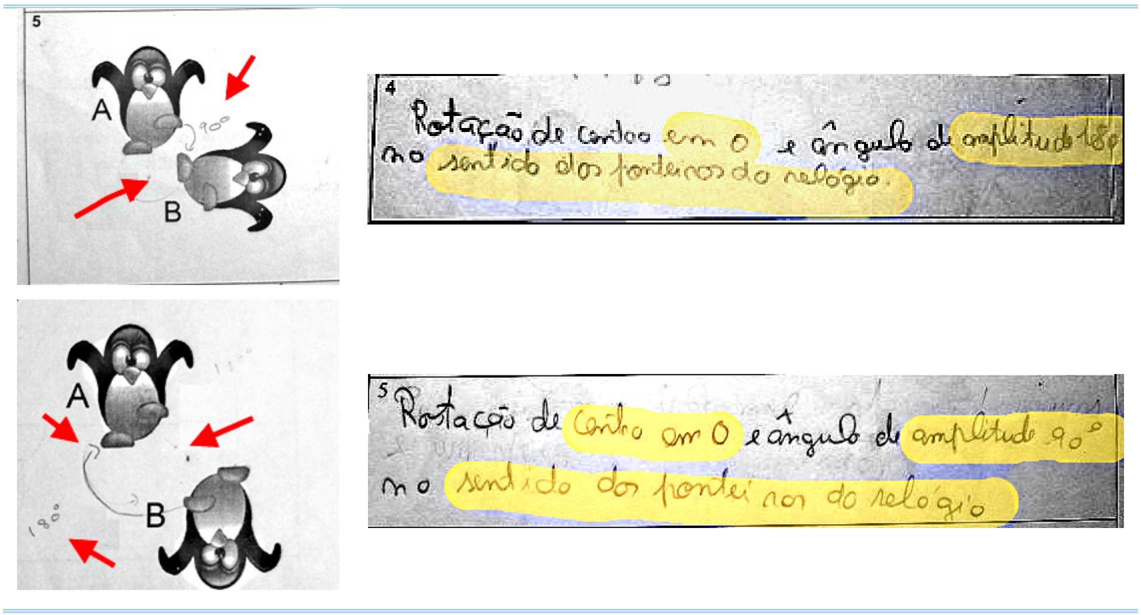


Fig. 80 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira e segunda questão da tarefa I - Rotações

No respeitante às duas situações que continham translações, pode-se observar na figura seguinte que os alunos escolheram um ponto no "pé do pinguim" como referência.

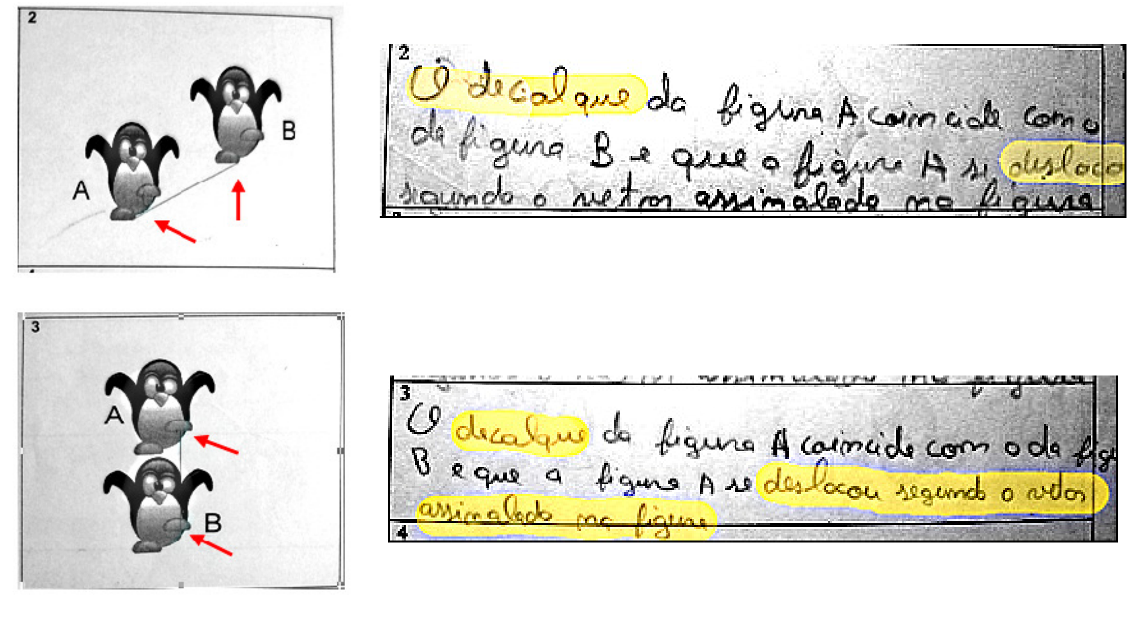


Fig. 81 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira e segunda questão da tarefa I - Translações

Apesar de desenharem o segmento de reta entre estes dois pontos, aquele não foi orientado. No entanto, e como se pode observar pelas imagens, foi utilizado o termo "deslocou" para caracterizar a transformação.

A terceira questão fazia a ligação "do papel e lápis" com o Ambiente Dinâmico de Geometria Dinâmica. O grupo tentou replicar as diferentes transformações que tinham sido observadas no GeoGebra. A questão foi resolvida com destreza assinalável depois de exploradas, de modo conjunto com toda a turma, as ferramentas do menu "transformações". Nesta fase foram, como já foi referido no caso anterior, fornecidas instruções sobre a natureza, criação e uso de seletores, que, como já se viu, não são mais do que "números livres" passíveis de serem alterados graficamente (fonte: manual do GeoGebra 3.2). Pode-se observar a sua utilização na figura seguinte para manipulação, através do rato, da amplitude de um ângulo de uma rotação.

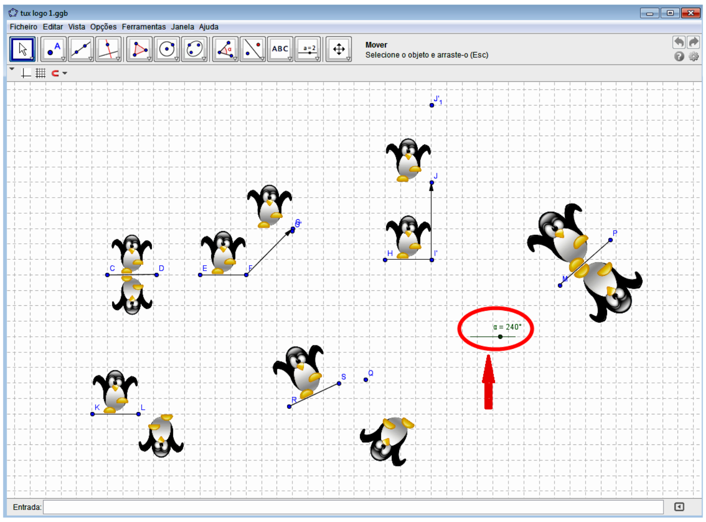


Fig. 82 - Resposta do Tiago e da Luísa à terceira questão da tarefa I

Tarefa II

Na primeira alínea da primeira questão da tarefa II e ainda com a ajuda do mira, os alunos tinham de descobrir, como já se viu, a posição de diferentes eixos associados a múltiplas reflexões de diferentes imagens. O grupo revelou, já, alguma facilidade em identificar os eixos de reflexão, independentemente de se tratar de eixos verticais, horizontais ou oblíquos. Nesta questão, surgiram algumas dificuldades ao traçar os eixos, devido ao afastamento provocado pela espessura da ponta do lápis. Quando confrontados pelo professor sobre as diferenças observadas nas distâncias dos objetos e respetivas imagens face aos eixos, constatavam que o eixo, apesar de localizado com alguma precisão, tinha sido, necessariamente, mal desenhado. Este facto é observável em duas situações na figura seguinte. Registe-se, também, que os "pinguins esquiadores" mais pequenos, pela sua situação de afastamento e pelo facto de se encontrarem numa posição obliqua relativamente ao papel, constituíram um maior desafio.

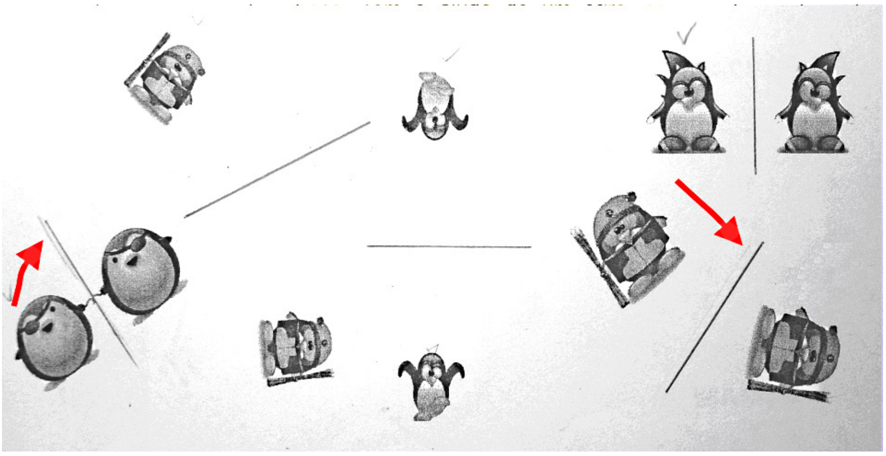


Fig. 83 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira alínea da primeira questão da tarefa II

A segunda alínea da primeira questão da tarefa II solicitava uma reprodução do trabalho feito na questão anterior, mas recorrendo ao GeoGebra. O grupo demonstrou enorme facilidade em realizar o exercício através desta abordagem (figura 84) utilizando, de forma intuitiva, as caixas de ferramentas relacionadas com as retas e segmentos de reta e com as transformações geométricas (Diário de Bordo, 18/04/2012). Note-se que, também neste caso, os alunos usaram como eixo de reflexão segmentos de reta, apenas por uma questão de simplificação da "construção" de modo a evitar uma maior complexidade visual. No final, foram "traçadas" as retas correspondentes (não observável na figura seguinte):

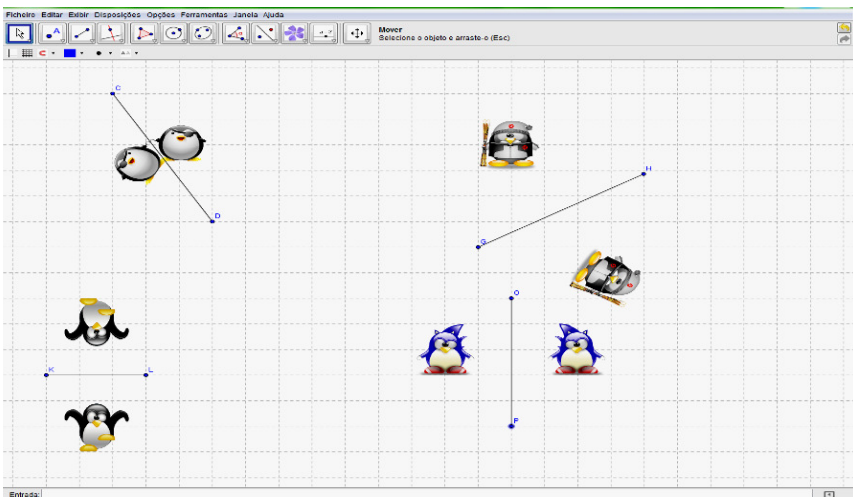


Fig. 84 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda alínea da primeira questão da tarefa II

Na última questão da tarefa II, procurava-se uma abordagem mais formal do conceito de reflexão e, como se pode ver pela imagem que se segue, o grupo deu uma resposta bem sucedida para o caso da reflexão vertical, mas o mesmo já não acontece no caso onde o eixo de reflexão se encontra numa posição oblíqua. Os alunos erraram também a reflexão de eixo horizontal. Quando confrontados, no momento de verificação através do mira, com as discrepâncias de resultados, o grupo revelou enorme surpresa e desconserto (Diário de Bordo, 18/04/2012).

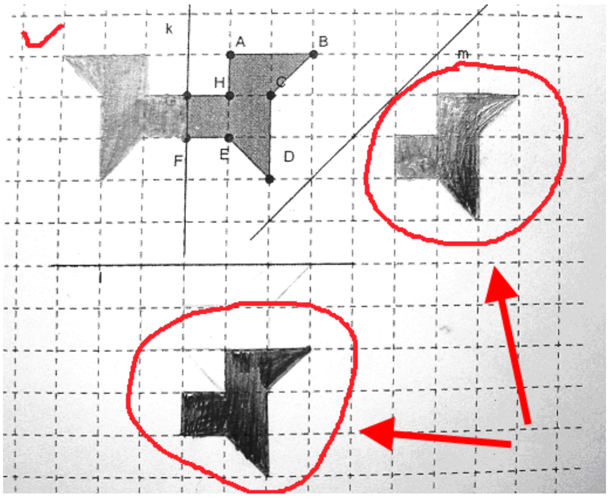


Fig. 85 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda questão da tarefa **II**

Parece estabelecer-se, neste momento, a ideia de que os alunos resolvem as tarefas com relativa facilidade quando usam um ADGD, facilidade esta que contrasta com dificuldades assinaláveis quando agarram no "papel e no lápis" para resolver as mesmas tarefas. Este aspecto, que não foi observado no caso anterior, era comum à maioria dos alunos da turma (Diário de Bordo, 18/04/2012).

Tarefa III

Esta ideia parece confirmar-se na tarefa III, especialmente focada na rotação, que tinha sido reformulada em função do que fora observado, na maioria dos alunos da turma, nas duas tarefas anteriores. Assim, propunha-se em primeiro lugar uma abordagem em ADGD onde se solicitava a realização de duas rotações de centro C para o mesmo polígono, com ângulos de + 120º e -120º. Verificou-se, uma vez mais, que o grupo demonstrou grande facilidade na sua resolução, como se pode observar na figura seguinte:

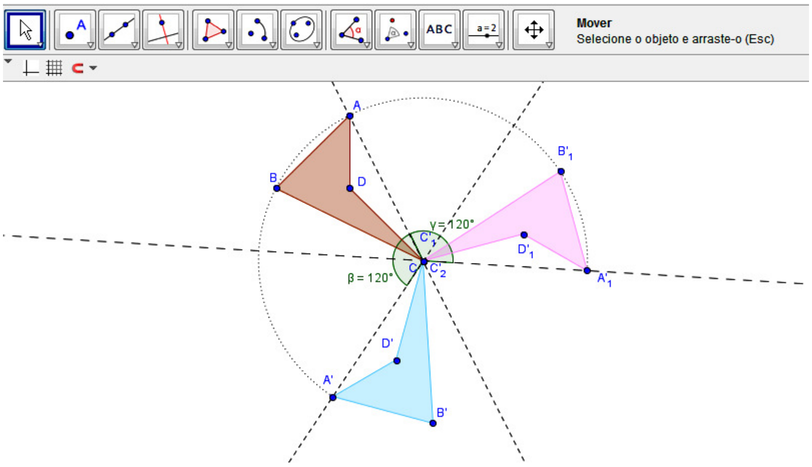


Fig. 86 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira questão da tarefa **III**

Na questão número dois, solicitava-se que os alunos realizassem o mesmo exercício mas num ambiente de "papel e lápis", com recurso a acetatos, transferidor e compasso. O grupo revelou novamente enormes dificuldades em fazê-lo. Chegou a uma solução muito distante da correta e experimentou grandes contratempos em estabelecer os pontos, os ângulos e a sua correspondente amplitude. A utilização do transferidor para efetuar medições foi um obstáculo sério para o grupo, apenas ultrapassável através de orientações fornecidas pelo professor (Diário de Bordo, 20/04/2012). Note-se, na figura seguinte, a orientação errada do elemento da direita e a incorreção do ângulo no elemento da esquerda.

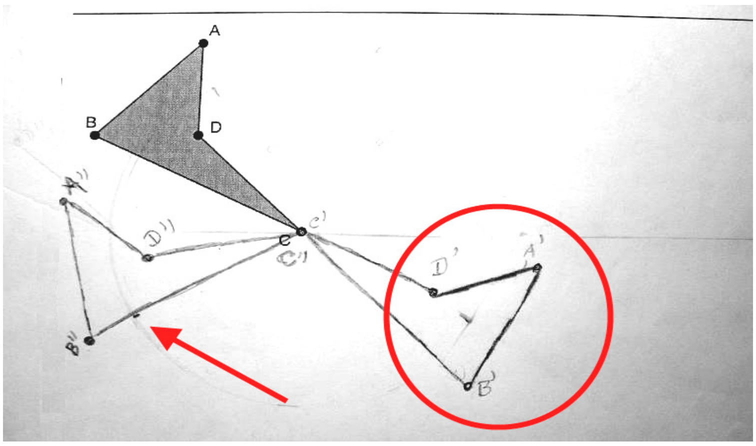


Fig. 87 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda questão da tarefa **III**

Quando se pediu, na quarta questão desta tarefa, uma descrição acerca do processo que deu origem a uma construção livre com rotações no GeoGebra, (questão número 3) o grupo utilizou um vocabulário adequado, identificando a isometria utilizada, a amplitude e o sentido do ângulo associado mas omitindo o centro de rotação.

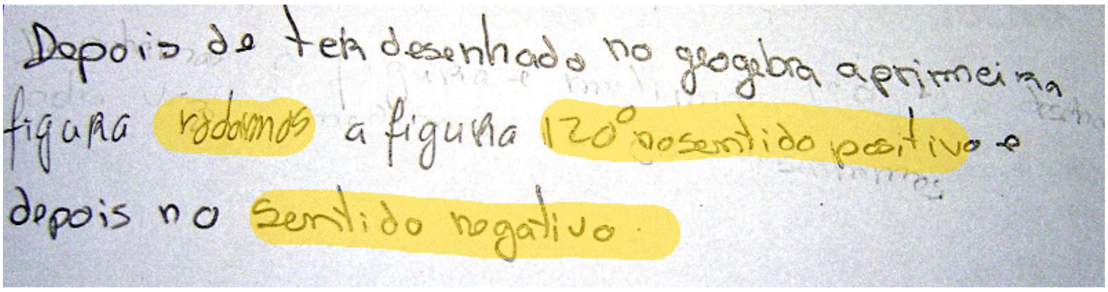

Depois de ter desenhado no geogebra a primeira figura rodamos a figura 120º no sentido positivo e depois no sentido negativo.

Fig. 88 - Descrição do Tiago e da Luísa de uma construção livre utilizando isometrias

Tarefa IV

A tarefa IV, centrada na translação, solicitava aos alunos, na primeira questão, que descobrissem um conjunto de vetores que dava origem a uma série de imagens geradas por translações de um dado objeto. O grupo revelou bastantes dificuldades em conseguir estabelecer estes vetores de forma autónoma. Discutiu-se, então, a necessidade de "marcar" um ponto no objeto e a sua imagem nos seus diferentes transformados. A partir daqui, o grupo conseguiu definir os diferentes vetores na construção inicial. Já transpô-los para a área quadriculada em baixo, voltou a tornar-se problemático para estes alunos, sobretudo os vetores que se encontravam numa posição obliqua em relação ao quadriculado (Diário de Bordo, 23/04/2012). Na figura seguinte pode ver-se este processo:

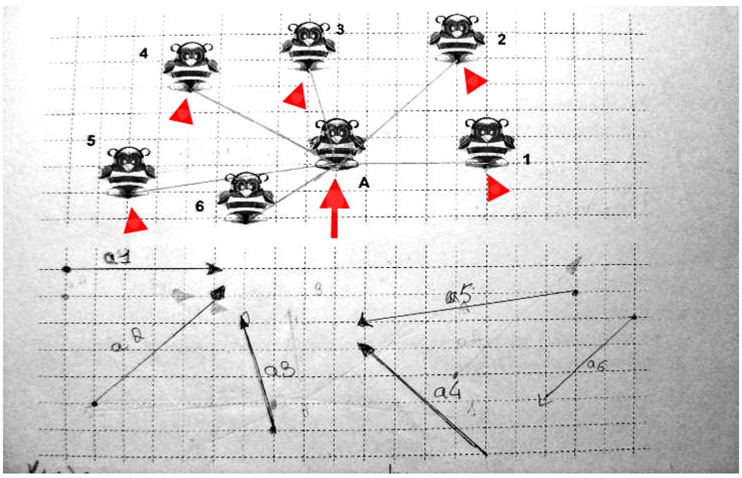


Fig. 89 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira alínea da primeira questão da tarefa IV

Quando solicitados, na segunda questão, a caracterizar os vetores que tinham sido encontrados, o grupo fê-lo de forma bastante informal e rudimentar mas reveladora, apesar de tudo, de um entendimento consistente do conceito. A figura seguinte mostra o vocabulário dos alunos. Note-se, para o caso dos vetores oblíquos, que os alunos sentiram a necessidade de medir com uma régua o seu comprimento.

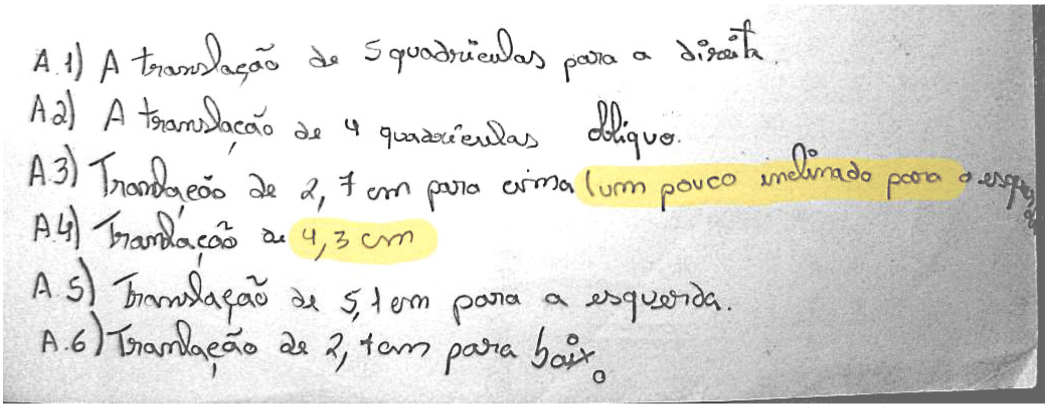


Fig. 90 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda alínea da primeira questão da tarefa IV

A segunda questão solicitava que os alunos desenhassem, em ambiente de "papel e lápis", a imagem de uma figura obtida por uma translação associada a um vetor oblíquo predefinido. Neste caso, os alunos estabeleceram apenas a imagem de um ponto ***G***, tendo depois reconstruído a figura a partir deste. Como se pode observar na figura seguinte, o grupo não assinalou os restantes pontos nem os nomeou.

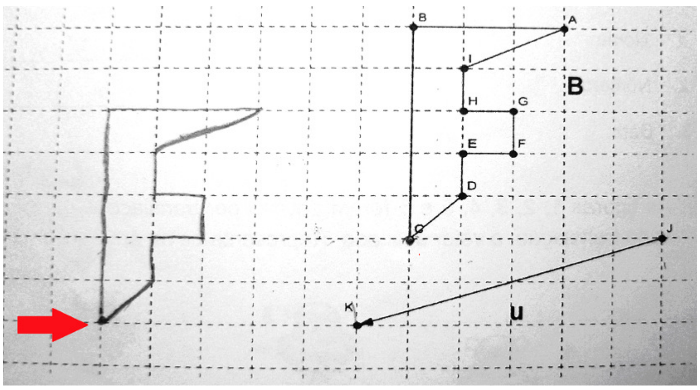


Fig. 91 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda questão da tarefa IV

Quando inquiridos sobre o que aconteceria à imagem se se alterasse a medida de comprimento do vetor (questão 2.1), os alunos responderam:

-*"...o **F** muda de sítio, mais para baixo e mais para a esquerda"*. Note-se que o grupo nem sequer contemplou a possibilidade do vetor ter uma medida de comprimento menor. Sobre uma mudança da direção do vetor responderam:

-*"A imagem pode ir para qualquer lugar."*

Tarefa V

A primeira questão da tarefa V solicitava aos alunos que, utilizando diferentes isometrias, "deslocassem" uma figura de uma dada posição para outra diferente. O grupo, na realização desta tarefa, utilizou reflexões para inverter a orientação da imagem, cometendo um erro na abordagem inicial, como é observável na figura que se segue:

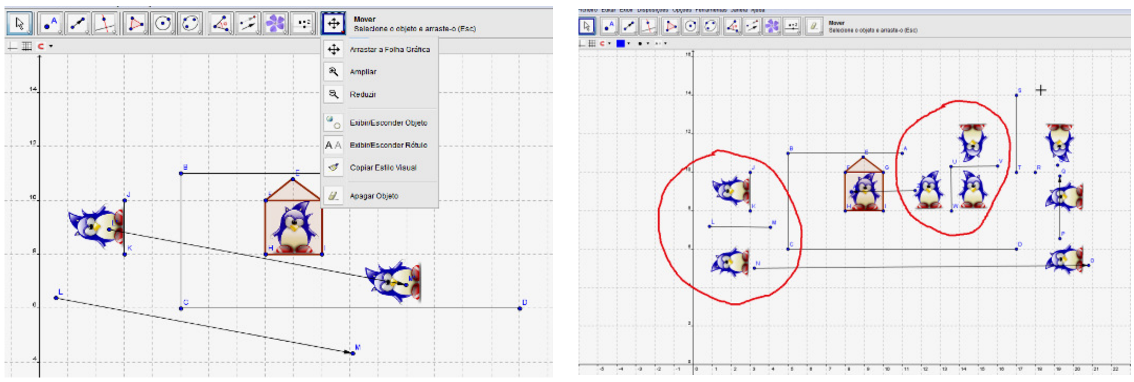


Fig. 92 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira alínea da primeira questão da tarefa V

Quando instados a descrever o processo pelo qual resolveram a questão anterior, o grupo escreveu:

-*"Fizemos uma reflexão de eixo horizontal e depois uma translação horizontal. Depois fizemos outra translação, mas desta vez vertical. Depois uma rotação de 90º e duas reflexões. Terminámos com outra translação horizontal."*

Na segunda questão, realizada no GeoGebra, os alunos eram convidados a descobrir soluções, num contexto de composição de isometrias, que permitissem obter uma imagem a partir de um objeto. Para a situação 1 (à esquerda na figura seguinte) os alunos realizaram duas reflexões de eixos perpendiculares; na segunda situação realizaram uma translação após uma reflexão.

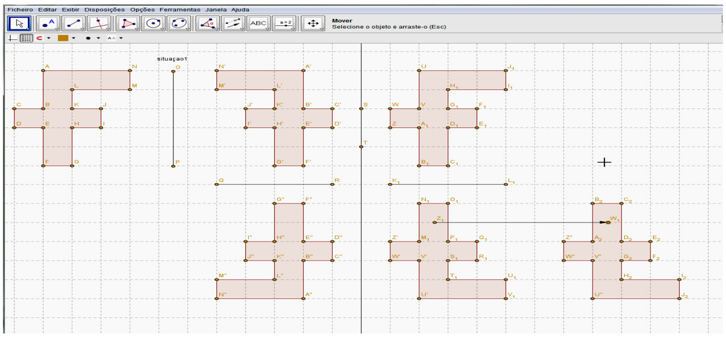
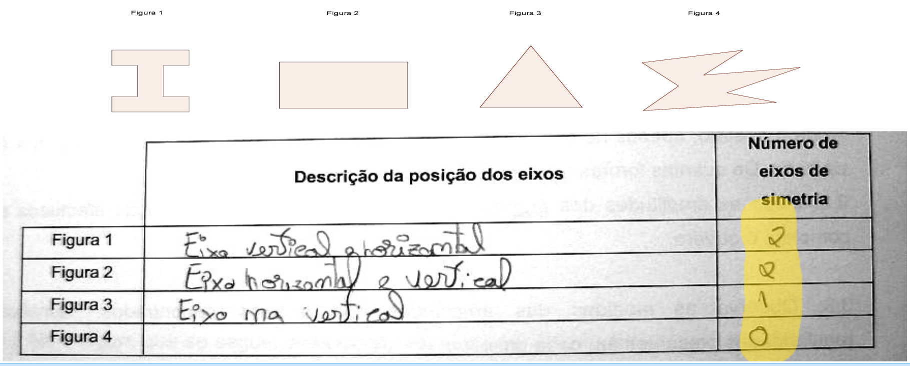


Fig. 93 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira alínea da segunda questão da tarefa V

A resolução desta questão envolveu a realização de bastantes tentativas mas o grupo revelou perseverança suficiente para alcançar as soluções satisfatórias. Quando solicitados a descrever os processos utilizados em cada situação, utilizaram uma terminologia adequada para caracterizar os "movimentos", omitindo apenas o valor da medida de comprimento do vetor usado na translação (Diário de Bordo, 27/04/2012). Note-se que a solução proposta pelo grupo para a segunda situação foi a ideal para a introdução do conceito de reflexão deslizante, este sim, completamente novo para os alunos.

Tarefa VI

O conceito de simetria surge para exploração na tarefa VI. A confusão com a noção de reflexão estava bem patente, como se pode observar nos resultados do pré-teste e nas intervenções dos alunos nas primeiras discussões sobre esta temática. Assim, a abordagem realizada centrou-se, como já se viu anteriormente, na ideia de a figura permanecer invariante depois de aplicada uma transformação. Seguindo esta ideia, o grupo, na primeira questão e em ambiente de "papel e lápis", explorou com um mira diferentes figuras, tentando perceber em que posições o deveria colocar de modo a não "alterar" as figuras quando fazia reflexões. Em seguida, preencheram o quadro seguinte (ver figura seguinte):



	Descrição da posição dos eixos	Número de eixos de simetria
Figura 1	Eixo vertical e horizontal	2
Figura 2	Eixo horizontal e vertical	2
Figura 3	Eixo na vertical	1
Figura 4		0

Fig. 94 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda alínea da primeira questão da tarefa VI

O grupo, relativamente à figura 4 e depois de alguma controvérsia, concluiu que, *"…não tinha solução...", "...a figura fica sempre diferente... não dá"* (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Quando inquiridos sobre o número de eixos que esperavam encontrar no caso do círculo, o grupo respondeu:

"Hmmm... bastantes, talvez uns 100!" (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Neste ponto, e em discussão que envolveu a turma, consolidou-se uma "nova" noção de simetria, particularizando que, neste caso, acontecia por reflexão.

A questão seguinte era uma confirmação do trabalho desenvolvido em ADGD. Constatou-se, novamente, a facilidade com que o grupo manipulava os elementos do ficheiro preparado confirmando os resultados da abordagem inicial (ver figura seguinte).

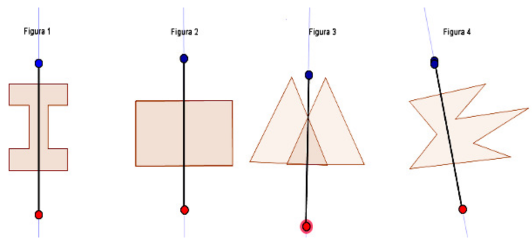
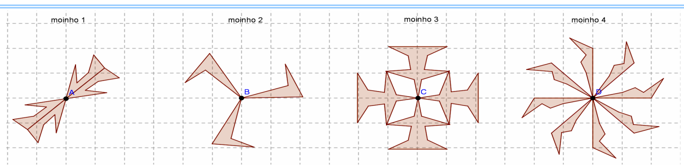
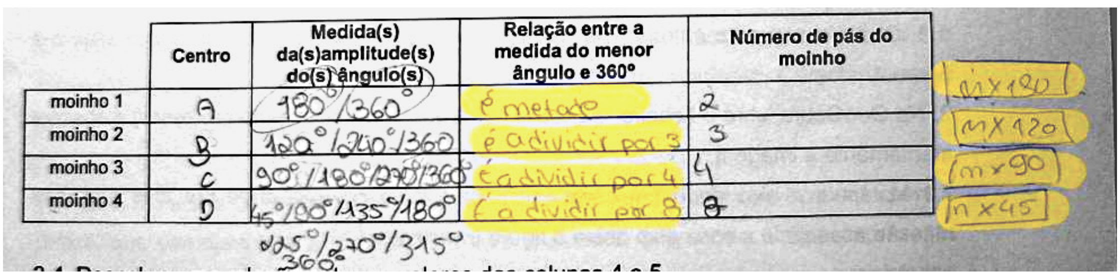


Fig. 95 - Imagem da manipulação de elementos na primeira alínea segunda questão da tarefa VI

Na terceira questão, e seguindo um caminho semelhante, o grupo procurou averiguar, para quatro "moinhos", e em ambiente de "papel e lápis", que rotações deixavam a figura invariante. Introduziu-se aqui, e com bastante sucesso, a ideia de simetria rotacional (ver figura seguinte). Novamente a manipulação do transferidor causou alguns constrangimentos aos alunos (Diário de Bordo, 02/05/2012). Em seguida, preencheram o quadro seguinte:





	Centro	Medida(s) da(s)amplitude(s) do(s) ângulo(s)	Relação entre a medida do menor ângulo e 360º	Número de pás do moinho	
moinho 1	A	180°/360°	é metade	2	n x 180
moinho 2	B	120°/240°/360	é a dividir por 3	3	n x 120
moinho 3	C	90°/180°/270°/360°	é a dividir por 4	4	n x 90
moinho 4	D	45°/90°/135°/180° 225°/270°/315° 360°	é a dividir por 8	8	n x 45

Fig. 96 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda alínea da terceira questão da tarefa VI

Note-se que a relação entre a medida de amplitude do menor ângulo e 360º foi estabelecida pelo grupo, depois de uma discussão geral com a turma. As anotações que se vêem à direita resultam, também, de uma discussão coletiva acerca da forma como se poderia escrever uma expressão numérica que traduzisse a medida de amplitude de todos os ângulos associados às rotações que permitiam que as figuras apresentassem simetrias. Sobre este aspecto, este grupo não fez qualquer observação.

A questão seguinte fazia novamente a transposição para o ADGD e pedia-se a confirmação dos resultados. Este processo, e como o próprio grupo reconheceu, estava enormemente facilitado pelo uso dos "seletores" que indicavam de forma contínua a medida da amplitude dos ângulos de rotação, conforme se pode observar na imagem seguinte:

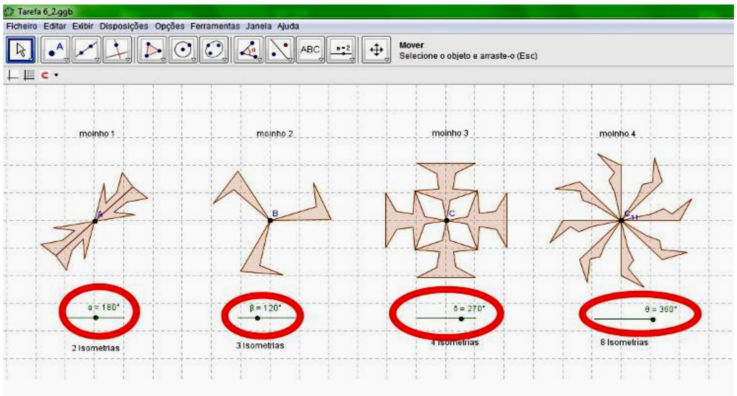


Fig. 97 - Imagem da manipulação de elementos na terceira alínea terceira questão da tarefa VI

Tarefa VII

Na tarefa VII, centrada no conceito de simetria translacional, solicitava-se aos alunos, na sua primeira pergunta, que descobrissem um vetor que aplicado à figura 1 a deixasse invariante. A exploração fazia-se em ambiente de "papel e lápis" com a ajuda de um acetato.

Como se pode observar na figura seguinte, o grupo desenhou mais do que um, mas todos horizontais e com sentido da esquerda para a direita:

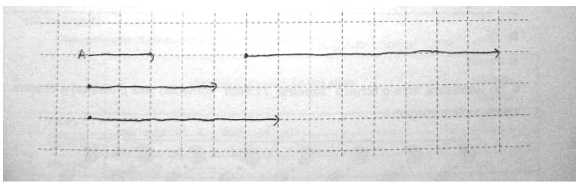


Fig. 98 - Resposta do Tiago e da Luísa à primeira alínea da primeira questão da tarefa VII

Esta resolução fez com que a questão seguinte lhes resultasse bastante simples. Tinham de escolher, de uma lista, um conjunto de vetores tal que, quando aplicados à imagem, permitiam que esta apresentasse simetria (figura 99). Foram escolhidos todos os vetores horizontais, inclusivamente aqueles cujo sentido era da direita para a esquerda. Esta situação não pareceu preocupar os alunos (Diário de Bordo, 04/05/2012).

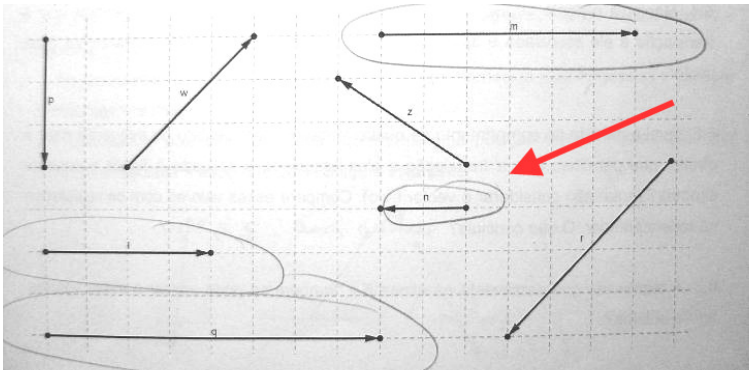


Fig. 99 - Resposta do Tiago e da Luísa à segunda alínea da primeira questão da tarefa VII

Em seguida, o grupo sintetizou os resultados num quadro fornecido para o efeito na questão seguinte (ver figura seguinte).

Vector	Direcção	Sentido	Medida de comprimento do vector
i	horizontal	esquerda direita	4
q	horizontal	esquerda direita	8
m	horizontal	direita esquerda	2
m	horizontal	esquerda direita	6

Fig. 100 - Resposta do Tiago e da Luísa à terceira alínea da primeira questão da tarefa VII

Quando observaram a coluna que continha a medida de comprimento dos vetores exclamaram, quase imediatamente, que se tratava de números pares embora escrever a expressão algébrica que os definia não se revelasse ser tão fácil para este grupo.

Na alínea seguinte, o grupo percebeu, com relativa facilidade, que não existia qualquer vetor que pudesse manter a nova figura invariante, tal como se observa na imagem seguinte:

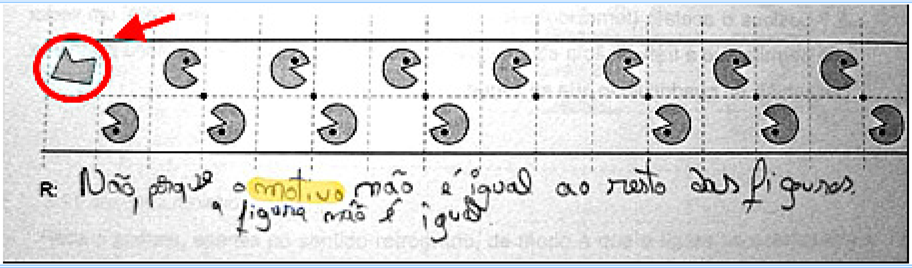


Fig. 101 - Resposta do Tiago e da Luísa à quinta alínea da primeira questão da tarefa VII

Note-se que a exploração desta questão aconteceu, como já foi referido, depois de uma explicação pouco formal sobre as diferentes maneiras de se obter um friso, com referências ao seu módulo e motivo (Diário de Bordo, 07/05/2012). Isto explica a utilização deste vocabulário específico que se observa na figura anterior.

As questões seguintes desta tarefa, em tudo semelhantes às expostas, solicitavam, agora o uso do GeoGebra para a sua resolução. O grupo sentia-se, claramente, mais à vontade e confiante quando executava as tarefas no GeoGebra por oposição ao papel e lápis (Diário de Bordo, 07/05/2012). Realizou-as, portanto, com grande proficiência e entusiasmo.

2.1.3. Pós-Teste

Ao verificar-se as respostas dos dois alunos do grupo ao pós-teste constata-se que, relativamente à primeira questão, a Luísa respondeu corretamente, identificando a posição do eixo da única possível reflexão, enquanto o Tiago assinalou, de forma aproximada, a solução mas acrescentando duas alternativas incorretas (ver figura seguinte).

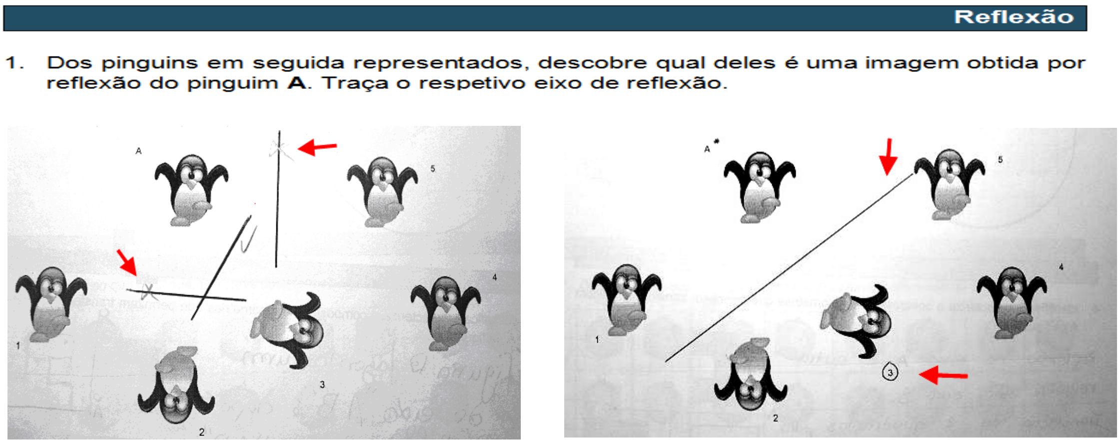


Fig. 102 - Resposta à primeira questão do pós-teste: do Tiago (à esquerda) e da Luísa (à direita)

Relativamente à segunda questão do pós-teste, onde se solicitava que os alunos desenhassem os vetores associados a três translações, os dois alunos do grupo responderam corretamente. Este facto não deixa de ser curioso pois, em contraste com a reflexão, esta isometria parece de aprendizagem mais difícil.

Quando se observa as respostas à questão número três, verifica-se que ambos os alunos responderam corretamente, sendo que a resposta da Luísa se encontra muito bem estruturada.

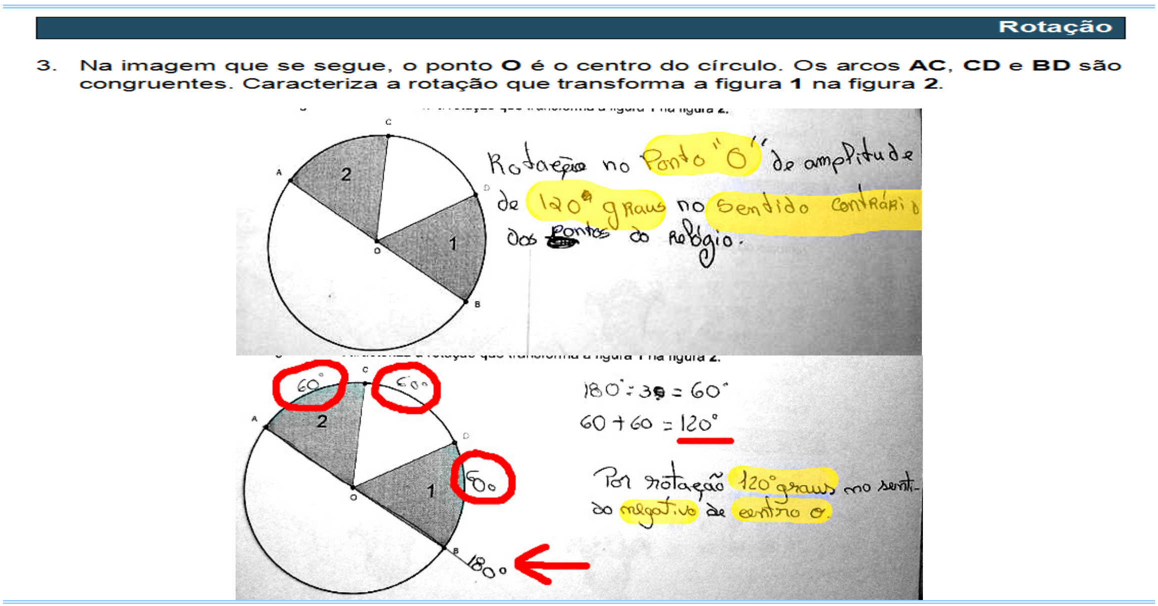


Fig. 103 - Resposta do Tiago (em cima) e da Luísa (em baixo) à terceira questão do pós-teste

Na quarta questão, a Luísa propôs, acertadamente, uma composição de duas reflexões de eixos perpendiculares mas comete um erro ao assinalar o eixo horizontal (ver figura 104a). O Tiago parece sugerir uma dupla reflexão de eixos perpendiculares bem assinalados, além de uma solução mais direta, através de uma rotação de 180º com centro em ***O*** (ver figura 104b).

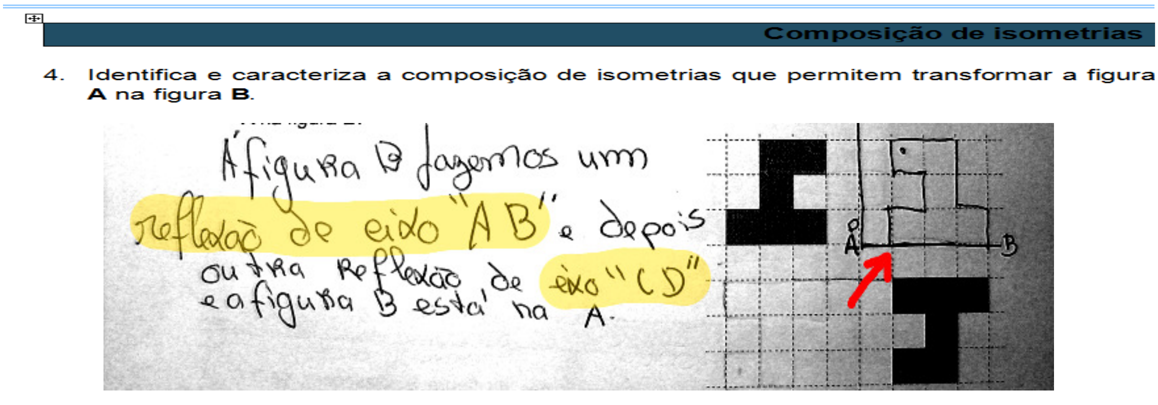


Fig. 104a - Resposta da Luísa à quarta questão do pós-teste

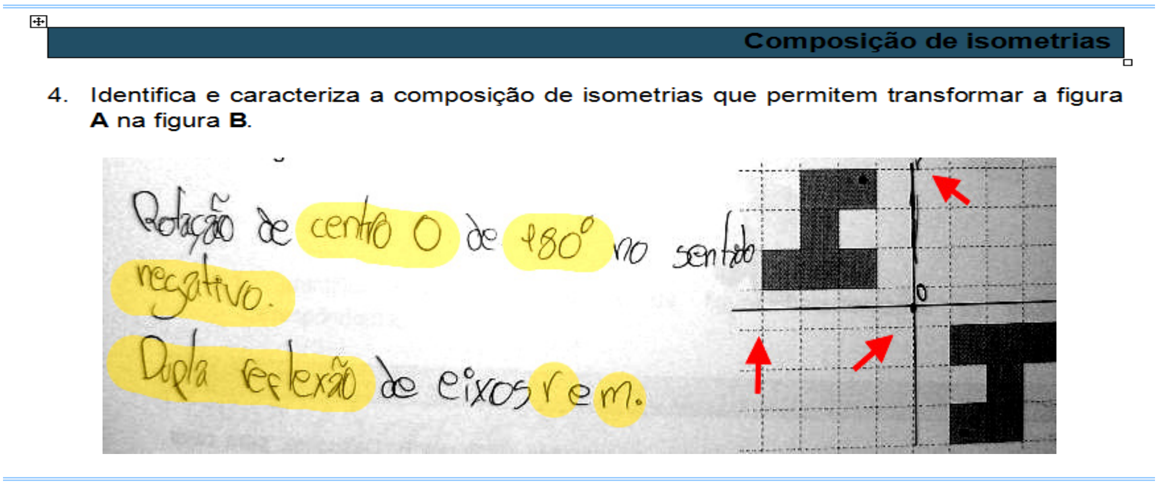


Fig. 104b - Resposta do Tiago à quarta questão do pós-teste

Quando se observam as respostas à pergunta número cinco (figuras 105a e 105b) constata-se um grau de "acerto" elevado embora com algumas particularidades. O Tiago identifica corretamente as isometrias nas duas primeiras alíneas mas não as caracteriza. No caso da terceira alínea, este aluno, apesar de perceber que estavam implícitos dois "movimentos", que identifica corretamente, não os relaciona com a reflexão deslizante (ver figura seguinte).

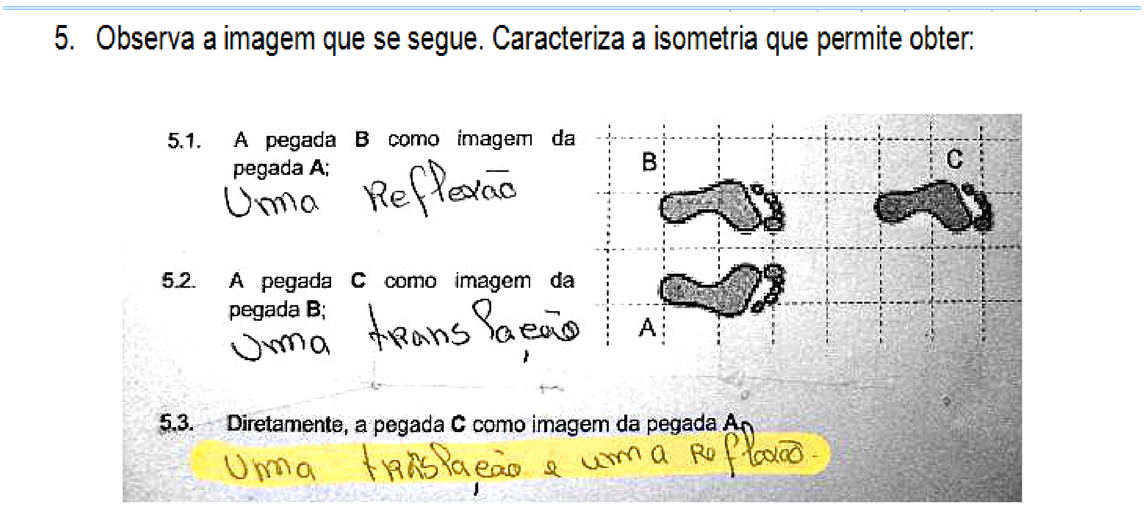


Fig. 105a - Resposta do Tiago à quinta questão do pós-teste

A Luísa, nesta questão, e como se observa na figura seguinte, atua sobre a imagem acrescentando-lhe um eixo ***r*** e um vetor horizontal com quatro unidades de medida de comprimento e sentido da esquerda para a direita. Este procedimento permite-lhe identificar e caracterizar adequadamente e com bastante precisão todas as transformações envolvidas.

5. Observa a imagem que se segue. Caracteriza a isometria que permite obter:

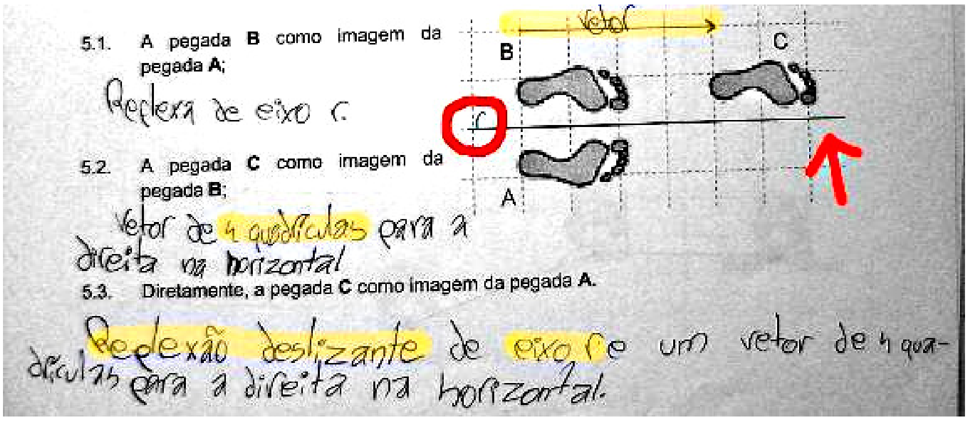


Fig. 105b - Resposta da Luísa à da quinta questão do pós teste

A questão número seis foi resolvida no computador com recurso ao GeoGebra. Observa-se, através das imagens constantes na figura seguinte, que os alunos chegaram a duas soluções distintas para "colocar" o pinguim dentro da casa. A Luísa utilizou duas translações e uma rotação fazendo uma descrição bastante precisa:

*-"Fiz uma translação com um vetor oblíquo. Depois uma rotação de 90º no sentido negativo e com o centro em **K**. Depois fiz outra translação e meti o Tux dentro da casa."*

O Tiago abordou a questão de forma mais direta, apenas com uma rotação seguida de uma translação, e faz uma descrição algo imprecisa dos procedimentos:

-"Rotação de 90º no sentido negativo. Translação para a direita e um bocadinho para cima."

6. Tenta descobrir como é possível levar o *Tux* do sítio onde está até sua casa utilizando isometrias. Com a ajuda do *GeoGebra*, tenta reproduzir o seu percurso (lembra-te que podes utilizar: rotações, translações e reflexões) e regista em papel todos os procedimentos.

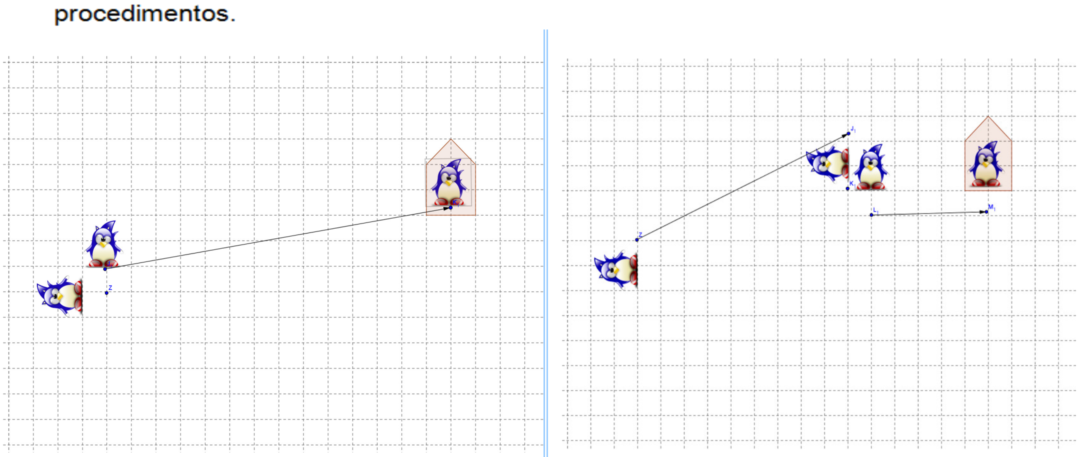


Fig. 106 - Resposta do Tiago (à esquerda) e da Luísa (à direita) à da sexta questão do pós-teste

Na sétima questão, solicitava-se aos alunos que descrevessem duas formas distintas de obter um dado friso. A Luísa escreveu:

*-"Situação 1: ao boneco **A** fazemos uma reflexão e dá o boneco **B**. Depois fazemos uma reflexão dos bonecos **A** e **B** e dá o **C** e o **D**. A seguir fazemos muitas translações para ficar um friso. Situação 2: ao boneco **A** fazemos uma reflexão e dá o **C**. Depois fazemos outra reflexão de eixo **YM** e dá **B** e **D**. Fazemos translações e fica um friso"* (ver figura seguinte).

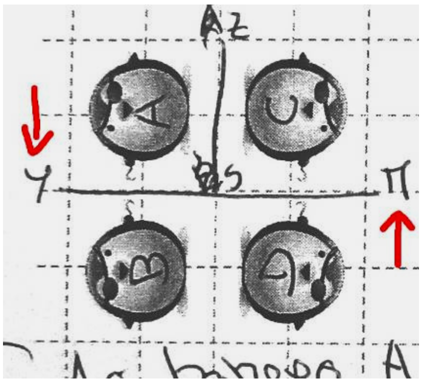


Fig. 107 - Anotações da Luísa no friso da sétima questão do pós-teste

Note-se que a aluna estabeleceu perfeitamente, ainda que utilizando um vocabulário muito informal, a criação do motivo a partir de um módulo e refere a necessidade de se fazerem translações.

O Tiago, como se pode observar na figura seguinte, ensaiou apenas uma solução que descreveu de forma muito sucinta, omitindo a necessidade de fazer translações. Da análise da sua resposta, parece que o aluno se refere a uma sucessão de reflexões e rotações num centro ***O*** que repete ao longo do friso.

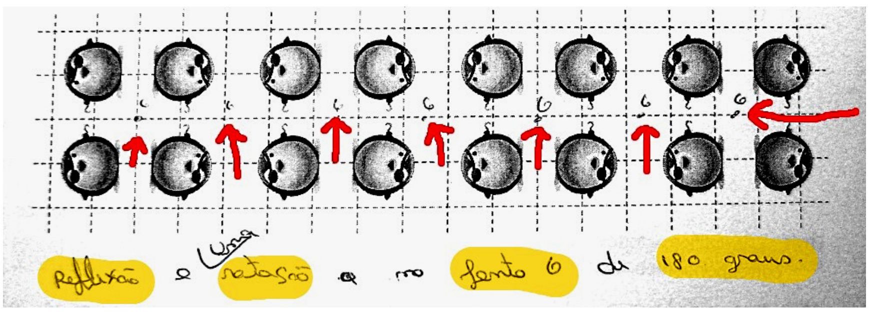


Fig. 108 - Anotações do Tiago no friso da sétima questão do pós-teste

Quando solicitados, na pergunta número oito, a criar no papel, utilizando diferentes isometrias, uma "composição de figuras geométricas", ambos os alunos construíram um friso. Curiosamente, o Tiago aplicou translações a um módulo simples (ver figura seguinte). A Luísa elaborou uma "construção" mais complexa. Note-se o erro na aplicação do vetor no friso do Tiago.

8. Cria livremente, utilizando diferentes isometrias, uma composição de figuras geométricas.

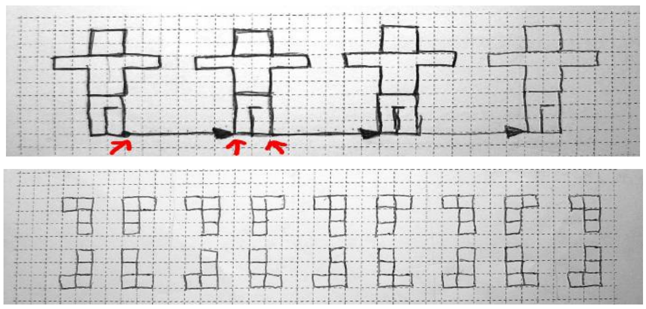


Fig. 109 - Resposta do Tiago (em cima) e da Luísa (em baixo) à oitava questão do pós-teste

Sobre a descrição de como procederam (questão número nove), o Tiago escreveu:

-"Fiz um boneco e depois apliquei translações."

A Luísa, por sua vez, referiu:

-"Desenhei a primeira figura com três quadrículas verticais e uma horizontal. Fiz uma reflexão de eixo vertical e depois outra horizontal. No final fiz translações."

Na última questão do pós-teste, relacionada com o conceito de simetria e realizada no computador, ambos os alunos identificaram e caracterizaram quase corretamente as quatro reflexões e rotações, omitindo apenas a localização do centro de rotação. Apesar da resolução no computador, tanto o Tiago como a Luísa ensaiaram uma resolução de "papel e lápis" bastante semelhante no enunciado do teste (ver figura seguinte).

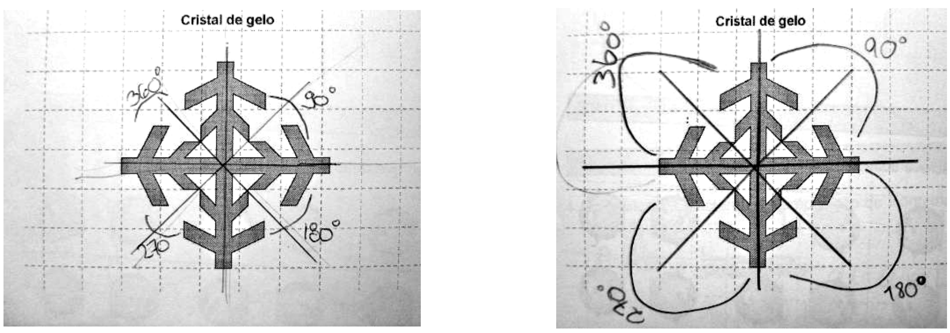


Fig. 110 - Resposta à décima questão do pós-teste: do Tiago (à esquerda) e da Luísa (à direita)

A tabela seguinte mostra os resultados comparativos para os dois alunos, no teste efetuado - modalidade pré e pós.

Questões	Cotação	Tiago		Luísa	
		Pré-teste	**Pós-teste**	Pré-teste	**Pós-teste**
Questão 1 - reflexão	10	0	**5**	0	**10**
Questão 2 - translação	10	0	**10**	0	**10**
Questão 3 - rotação	10	0	**10**	0	**10**
Questão 4 - composição	8	0	**8**	0	**7**
Questão 5.1 - reflexão	6	0	**3**	3	**6**
Questão 5.2 - translação	6	0	**3**	3	**5**
Questão 5.3 - ref. deslizante	6	0	**3**	0	**6**
Questão 6 - cmp. iso. ADGD	8	0	**5**	0	**6**
Questão 7 - frisos	8	0	**4**	0	**7**
Questão 8 - construção livre	8	0	**3**	0	**8**
Questão 9 - descrição	10	0	**8**	0	**8**
Questão 10 - simetria	10	0	**8**	0	**9**
	Totais:	0	**70**	6	**92**

Tabela 19 - Resultados do Tiago e da Luísa ao pré e pós-teste (%)

Da análise da tabela anterior, constata-se uma evolução assinalável para o caso do Tiago e bastante significativa para a Luísa que, recorde-se, apresentava, no início deste estudo, um perfil de um aluno de nível 3 com problemas de autoconfiança. Note-se que o Tiago se aprixima do limiar do nível 4, enquanto que a Luísa atinge mesmo o nível 5.

Ao analisarem-se as respostas dos alunos à IV secção do Questionário Final, constata-se um elevado grau de concordância de ambos os alunos sobre as implicações da forma como foi implementado o tópico na compreensão do que são isometrias, na formação dos frisos e no entendimento do conceito de simetria. Referem que *"...podemos aplicar as isometrias sem nos enganarmos"; "....podemos desmontar os frisos..."; "...no GeoGebra vê-se melhor!".*

Os dois alunos declararam que aprofundaram outros conhecimentos de Geometria e desenvolveram a sua capacidade de resolver problemas. Os alunos acrescentaram, ainda, que *"Resolver estes problemas é muito fixe...!"*

Desde já, note-se, uma visão muito interessante para estes dois alunos!

2.2. A Criatividade

O desenho da sequência de aprendizagem contemplou, de forma deliberada, desde o seu início, tarefas cujo grau de abertura possibilitasse resoluções mais ou menos criativas por parte dos alunos. Algumas delas, como se verá, tiveram consideráveis implicações nas soluções finais. Salienta-se que estes trabalhos emergiram sempre num ambiente de discussão e confronto de ideias, no seio do próprio grupo, entre os diversos grupos e também ao nível da turma.

Na resposta deste grupo à quarta questão da tarefa I (figura 111), se uma parte significativa dos alunos utilizou os mesmos pinguins para a realização da construção livre utilizando isometrias, mesmo depois de terem sido mostrados trabalhos "muito diferentes" de outros alunos, este grupo propôs uma construção com um seletor "animado" que controlava a medida da amplitude de vários ângulos de rotação aplicadas a diferentes polígonos. Ao "ativar o traço", foi possível observar a sequência que se segue:

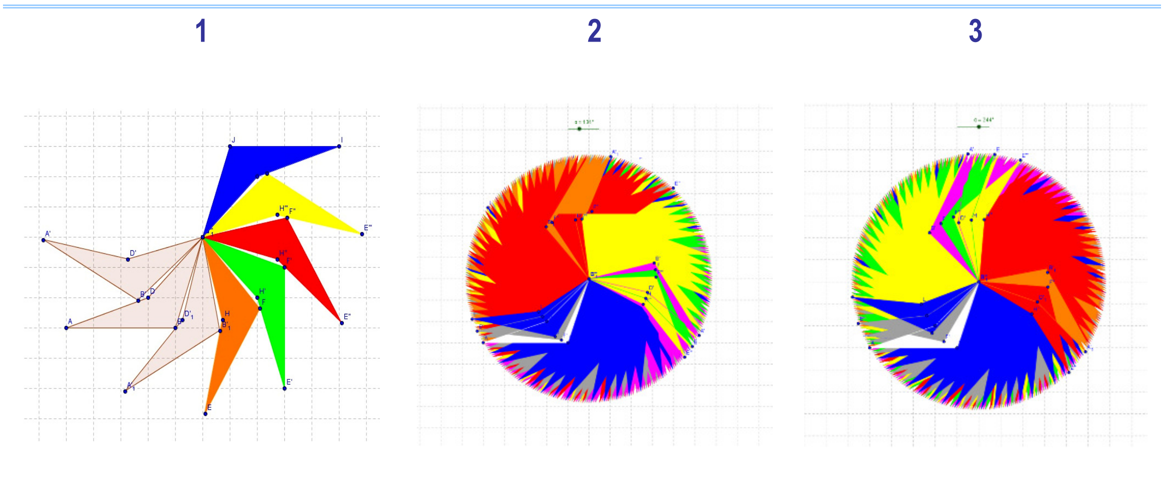


Fig. 111 - Resposta do Tiago e da Luísa à quarta questão da tarefa I

É interessante notar que o grupo produziu esta abordagem depois da visualização de outros trabalhos muito "diferentes" produzidos por outros alunos. A exibição deste trabalho causou assombro nos colegas que se sentiram motivados a procurar "outros caminhos" e, dependendo dos casos, fizeram-no com maior ou menor sucesso (Diário de Bordo, 16/04/2012).

Na terceira questão da tarefa III, na qual se solicitava uma construção livre envolvendo apenas rotações, o grupo utilizou diferentes abordagens (figura 112) com resultados igualmente distintos dos produzidos pela maioria:

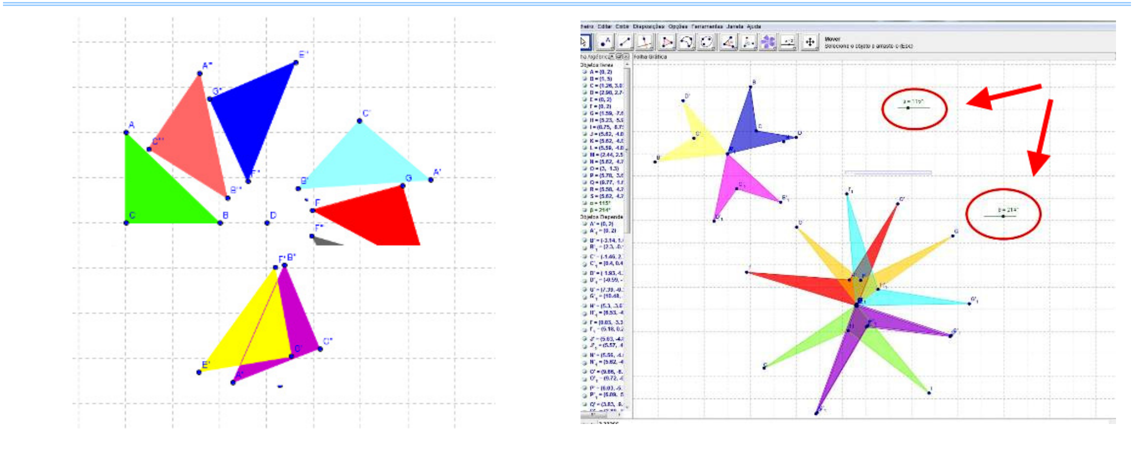


Fig. 112 - Resposta do Tiago e da Luísa à terceira questão da tarefa III

Note-se novamente a utilização de seletores para manipular a medida da amplitude dos ângulos de rotação e a produção de "vários" trabalhos para a mesma questão, explorando vias alternativas, o que demonstra uma certa fluência. O grupo mantinha, também, uma atitude muito recetiva às sugestões dos colegas e do professor (recorde-se que os ambientes de trabalho dos terminais dos alunos estavam a ser projetados em tempo real para toda a turma) e alteravam frequentemente elementos e, por vezes, os próprios processos de resolução, numa clara manifestação de flexibilidade (Diário de Bordo, 20/04/2012).

Resultados análogos são também observáveis na questão número três da tarefa IV, desta vez centrada na translação. Veja-se como o grupo realizou duas abordagens diferentes incorporando, numa delas, elementos da rotação abordados na tarefa anterior (ver figura seguinte):

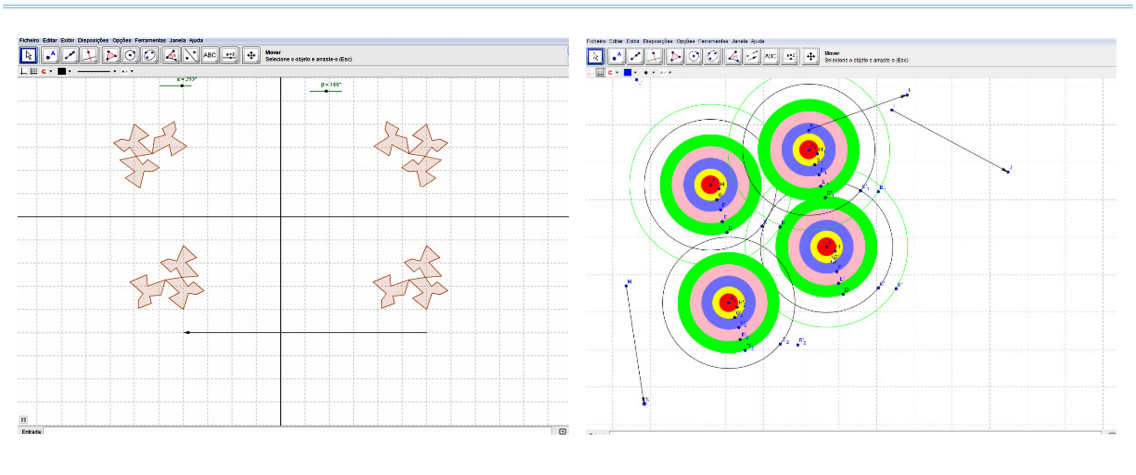


Fig. 113 - Resposta do Tiago e da Luísa à terceira questão da tarefa IV

Quando se solicitou aos alunos que, livremente, fizessem uma construção envolvendo composição de isometrias, utilizaram, curiosamente e pela primeira vez, a reflexão. Fizeram-no conjuntamente com diversas rotações como se pode observar na figura seguinte, que é uma tentativa interessante de construir um círculo cromático. Esta isometria parecia fascinar os alunos.

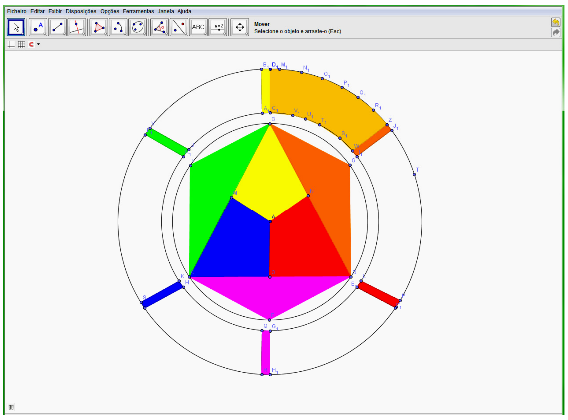


Fig. 114 - Resposta do Tiago e da Luísa à terceira questão da tarefa V

É interessante também constatar a "necessidade" que estes alunos sentiam em animar os "seletores" para produzir movimento, o que não deixa de ser curioso num contexto de transformações geométricas.

O "rigor" da simetria levou o grupo, na questão número quatro da tarefa VI, a elaborar uma construção muito simples mas com um certo grau de originalidade pois esta não apresenta simetrias por reflexão - apenas as rotacionais estão presentes (ver figura seguinte):

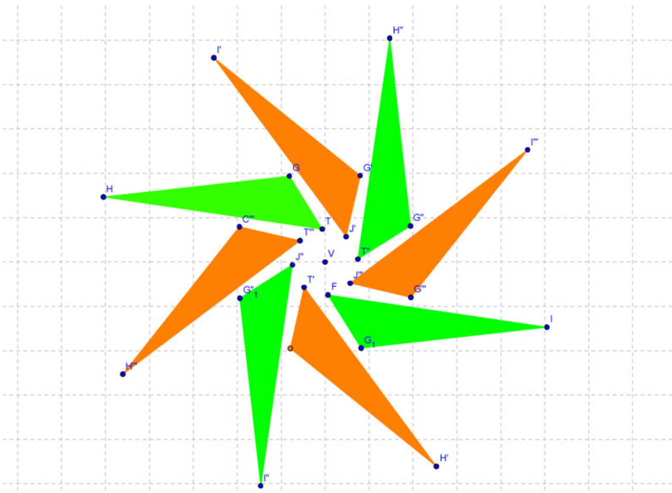


Fig. 115 - Resposta do Tiago e da Luísa à quarta questão da tarefa VI

Um aspecto que emerge deste caso e que é comum a grande parte dos alunos da turma é a diferença, em termos de criatividade, nos produtos das tarefas realizadas em "papel e lápis" e no GeoGebra. Repare-se no friso, produzido nesta aplicação no âmbito da resposta à questão quatro da tarefa VII, e compare-se com os realizados pelos dois alunos no pós-teste em ambiente de "papel e lápis" (figura 116). Note-se que está construído a partir de uma reflexão de eixo vertical aplicada ao barco seguida de translação.

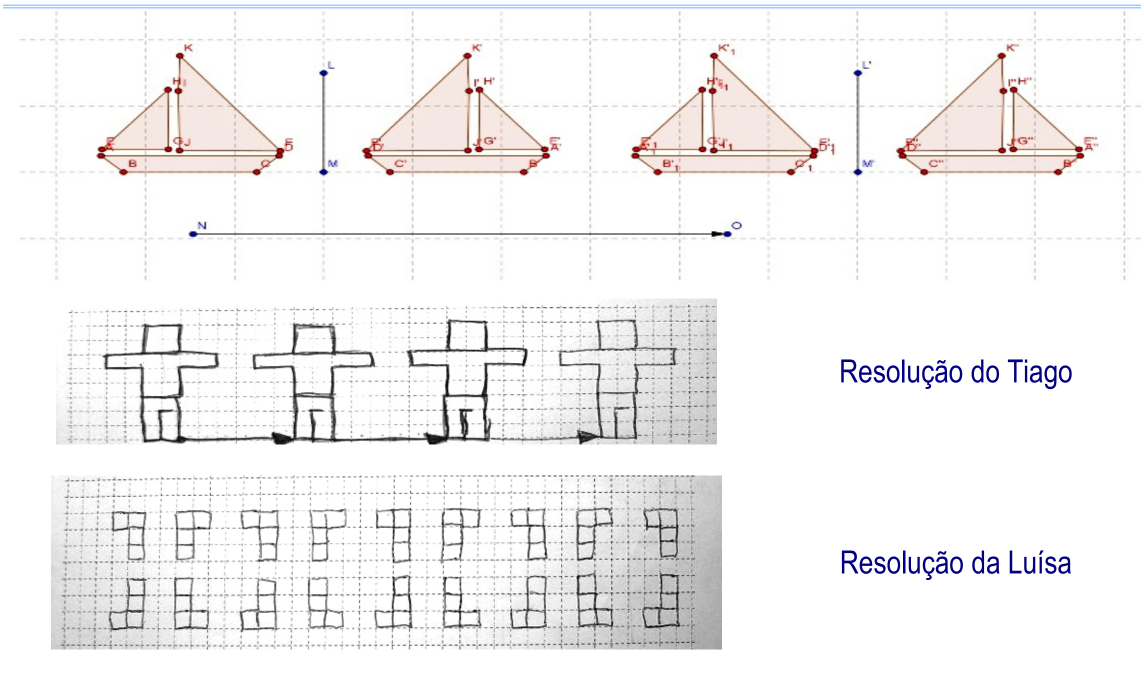


Fig. 116 - Friso elaborado pelo Tiago e pela Luísa na quarta questão da tarefa VII e os elaborados no pós-teste

De alguma forma, parece que, o ADGD, ao facilitar a realização das transformações, muitas vezes retirando-lhe um certo grau de formalismo e possibilitando o visionamento instantâneo do processo e dos resultados, permite um maior nível de fluência e flexibilidade que conduz a produtos mais originais e, em última análise, mais criativos. Os alunos focam-se no "produto" libertando-se, de algum modo, dos constrangimentos associados à manipulação do "papel e lápis" e respetivos instrumentos.

Este grupo apresentou alguns produtos fruto das suas abordagens na realização das tarefas que, como se pôde observar nas imagens apresentadas, se destacam sobretudo pela sua originalidade, em clara dissonância com a maioria dos alunos da turma que, na generalidade dos casos, se limitava a reproduzir, inclusive com elementos da tarefa inicial, as construções apresentadas em cada questão.

Quando se analisa as respostas à III secção do Questionário Final, relativa à criatividade, verifica-se que ambos os alunos declararam concordar que as tarefas "tradicionais" limitam a sua criatividade e que aulas de Matemática criativas são essenciais para melhorar a aprendizagem dos alunos. A Luísa referiu considerar-se agora mais criativa, enquanto que o Tiago assinalou não ter opinião. Ambos referiram que discordam que ser criativo é difícil e que as tarefas propostas não contribuíram para desenvolver a sua criatividade.

A Luísa declarou concordar firmemente que observar os trabalhos de outros alunos a levou a querer ser mais criativa. Este aspecto teve também a concordância do Tiago que referiu que gostar da tarefa a realizar aumenta a sua criatividade. A Luísa corroborou esta ideia manifestando plena concordância.

Os dois alunos referiram concordar que a criatividade pode ser treinada e que não imaginavam que fosse possível produzir trabalho criativo a Matemática.

À pergunta sobre se as tarefas propostas teriam sido criativas, ambos responderam que sim e justificaram:

As tarefas propostas nas aulas foram criativas? Justifica	
Tiago:	"Sim... porque eram diferentes e divertidas."
Luísa	"Sim... porque fui mais criativa."

Quadro 14 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre a natureza criativa das tarefas

Quando questionados sobre se os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos, ambos responderam também afirmativamente referindo-se ao facto de o professor partilhar o trabalho com todos, emitir opinião e "guardar" os trabalhos:

Os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos? Justifica	
Tiago:	"Sim... porque o professor guardava os trabalhos mais originais."
Luísa	"Sim... porque dava sempre a sua opinião e mostrava para todos verem."

Quadro 15 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre a valorização dos trabalhos criativos dos alunos

Quando inquiridos sobre o que achavam que distinguia um trabalho criativo de outro pouco criativo, o Tiago mencionou o processo e a Luísa a originalidade como aspectos distintivos:

O que achas que distingue um trabalho criativo de outro pouco criativo?	
Tiago:	"... pela forma como se fez!"
Luísa	"... um trabalho criativo tem coisas diferentes."

Quadro 16 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre as traços distintivos de um trabalho criativo

2.3. Atitudes Face à Matemática

A análise que se segue, resulta do cruzamento de dados, obtidos a partir do Diário de Bordo e do estudo das respostas ao Questionário Inicial e ao Questionário Final, secção V, relativa ao domínio atitudinal dos alunos face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular, dos alunos Tiago e Luísa.

O Tiago, no final deste estudo, apresentava um grau de autoestima mais elevado relativamente ao início. Este facto adveio, provavelmente, de dois aspectos fundamentais: o sucesso na resolução das tarefas e o seu desempenho no pós-teste. A Luísa parecia agora mais confiante, pois "arriscava" participar ativamente na aula de forma mais frequente (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências). Ambos envolviam-se na resolução das tarefas, com a Luísa a assumir, interessantemente, o papel de líder do grupo (Diário de Bordo, 20/04/2012).

Quando inquiridos, no Questionário Final, acerca das implicações sobre a forma como foi abordado o tópico, através do recurso ao GeoGebra, numa visão mais positiva da Geometria e da Matemática, tanto o Tiago como a Luísa manifestaram plena concordância com este aspecto. A Luísa assinalou o seu novo gosto pela Matemática e ambos se referem ao facto de a abordagem tornar a Geometria divertida:

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para uma visão mais positiva da Geometria porque...	
Tiago:	"...nunca pensei que a geometria podia ser divertida!"
Luísa	"... é divertido trabalhar geometria no computador."

Quadro 17 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre o impacto da abordagem do tópico no desenvolvimento de uma visão mais positiva da Geometria

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para uma visão mais positiva da Matemática porque...	
Tiago:	"... a Matemática não é a seca que eu pensava!"
Luísa	"...agora adoro Matemática!"

Quadro 18 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre o impacto da abordagem do tópico no desenvolvimento de uma visão mais positiva da Matemática

Esta aluna, recorde-se, tinha declarado, no início deste estudo empírico que gostar de Matemática e de Geometria mas note-se, agora, a utilização do termo "adoro" para referir-se à Matemática. É no Tiago que parece dar-se uma alteração atitudinal mas drástica. Este aluno, recorde-se, declarou, no Questionário Inicial, não gostar quer de Matemática quer de Geometria.

Note-se que o aluno declarou, agora, (ver quadros 17 e 18) que acha a temática divertida e, com palavras fortes, manifestou uma visão mais positiva da Matemática.

Estes alunos pareciam, também, extrair grande prazer da realização das tarefas, audível pelos seus "oohhhhh!" aquando do toque de saída (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências). Esta ideia sai reforçada quando se observa a resposta de ambos os alunos, também ao Questionário Final, quando referiram discordar que a abordagem tenha contribuído para tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora.

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora...	
Tiago:	"Não... assim é mais divertido"
Luísa	"Não... é giro descobrir coisas novas assim!"

Quadro 19 - Resposta do Tiago e da Luísa sobre a abordagem do tópico e a possibilidade de a Geometria se tornar mais aborrecida e desmotivadora

Depreende-se, das suas respostas, que ambos se divertiam com as tarefas.

Os alunos manifestavam, também, grande disponibilidade e entusiasmo para explorações alternativas e com resultados muito interessantes, como se teve oportunidade de ver nas duas secções anteriores. O número de abordagens produzido e a originalidade das soluções são o corolário dessa atitude.

-*"Está bem assim, professor?"*

-*"Professor, pode mostrar o nosso?"*; - sugeriam frequentemente (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências).

Ambos os alunos, como já se viu, declararam considerar-se razoáveis a Matemática. A competência percebida sobre si próprios, no início do estudo empírico, estava de acordo com a realidade. Para a Luísa, esta visão sofreu uma evolução positiva significativa pois, além da resolução muito bem sucedida das tarefas, os seus resultados no pós-teste foram bastante elevados, quer em termos relativos, quer absolutos. Já em relação ao Tiago, apesar dos resultados do pós-teste terem sido positivos, o aluno pareceu beneficiar mais dos processos de resolução das tarefas e do trabalho em grupo. Estes fatores ditaram uma nova forma, muito positiva, de encarar as aulas de Matemática:

-*"...isto é mesmo fixe!";*

-*"Professor, já acabamos! Podemos fazer agora a próxima tarefa?"* (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências).

Observou-se também que, apesar de existirem alguns erros concetuais iniciais sobretudo no conceito de simetria e de reflexão, os alunos manifestaram sempre vontade para os corrigir:

-*"...mas isto não é a simetria? Não é como se fosse no espelho?"* (Diário de Bordo, 16/04/2012).

-*"...simetria... mas isto é uma rotação!"* (Diário de Bordo, 02/05/2012).

-*"...mas afinal o que é simetria professor?"; "...tem que nos explicar*!" (Diário de Bordo, 02/05/2012).

Ambos os alunos sentiam-se bastante motivados para o sucesso à disciplina. Colocavam dúvidas com maior frequência e, sabendo que o professor realizava um trabalho semelhante em aulas de apoio a alunos de outras turmas, solicitaram ao próprio e à respetiva Diretora de Turma permissão para assistir, de forma voluntária, a estas aulas quando o horário o permitisse. Parece evidente uma alteração drástica de atitude face à disciplina (Diário de Bordo, 23/04/2012). Refira-se que tanto o Tiago, que queria ser arquiteto, como a Luísa, que pretendia ser enfermeira (fonte: Projeto Curricular de Turma), atribuíam uma importância significativa à Matemática.

Ambos os alunos assinalaram, no Questionário Final, concordar que a abordagem os ajudou a desenvolver o seu pensamento geométrico justificando que lhes permitiu perceber melhor as coisas. Declararam, também, como já se viu, que se sentiam agora mais criativos. Estas respostas sugerem que o nível da competência percebida para a aprendizagem aumentou.

Também declararam que os seus receios face à disciplina diminuíram, justificando que se achavam mais confiantes e que o seu grau de interesse pela disciplina aumentou porque se sentiam mais motivados e achavam tudo mais divertido. A Luísa escreveu mesmo que este último aspecto é muito importante para o seu interesse pela disciplina.

Algumas manifestações de ansiedade foram sendo cada vez menos frequentes ao longo da implementação da sequência didática (Diário de Bordo, 23/04/2012).

Em síntese, pode-se afirmar-se que:

- os níveis de envolvimento, interesse e entusiasmo pela Matemática e pela Geometria elevaram-se significativamente para os dois alunos;
- a competência percebida para a aprendizagem aumentou;
- os níveis de ansiedade nos dois alunos diminuíram.

3. O Caso Francisca e Gabriela

O grupo 3 era formado pela Francisca e pela Gabriela. Ambas as alunas tinham 11 anos à data da implementação deste estudo. A Gabriela tinha tido, no ano letivo anterior, nível 5 a Matemática e a Francisca nível 4. A Francisca manteve este nível nos dois primeiros períodos do ano em que decorreu este estudo e a Gabriela tinha descido para nível 4 no primeiro período, voltando a subir para o nível 5 no segundo. Ambas eram esforçadas e interessadas. A Francisca revelava, por vezes, alguns problemas de autoconfiança e timidez. A Gabriela apresentava uma personalidade forte, marcada pela autoconfiança e segurança nas suas intervenções e era bastante participativa, ao contrário da Francisca neste último aspecto. No Questionário Inicial, ambas declararam que gostavam de Matemática e que se consideravam, curiosamente, alunas razoáveis à disciplina. Afirmaram ainda que possuíam computador em casa com ligação à Internet e que gostavam de o usar, declarando um nível de conhecimento médio na sua utilização. A Francisca afirmou que o fazia de forma diária como ferramenta de estudo e de comunicação e que raramente o fazia para fins lúdicos. A Gabriela assinalou que fazia uma utilização esporádica, como ferramenta de estudo, de comunicação e também para fins lúdicos. Ambas declararam saber manipular pastas e ficheiros em diferentes suportes, o que se pôde constatar aquando da resolução do teste de competências tecnológicas. Indicaram conhecer apenas o GeoGebra tendo, previamente, nos dois primeiros períodos do ano letivo, realizado pequenos trabalhos nas disciplinas de Matemática e EVT com recurso a esta aplicação. Sobre o gosto pela Geometria, a Gabriela, apesar de assinalar que a considerava importante, declarou não gostar porque *"...apenas servia para conhecer sólidos geométricos"*. A Francisca referiu que considerava a Geometria importante e que gostava da temática porque lhe parecia divertida e interessante.

Ainda no Questionário Inicial, quando inquiridas acerca das suas representações sobre a criatividade, as alunas manifestaram conceções semelhantes. À questão acerca do significado sobre o que era ser criativo, as duas alunas expressaram a ideia da criação de um trabalho original, novo:

O que significa para ti ser criativo?	
Francisca:	"... é criar coisas que não existem de coisas que existem."
Gabriela:	"... é ser original e criar coisas novas."

Quadro 20 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre o significado de criatividade

Quando questionadas acerca das áreas em que pensavam ser possível ser criativo, a Francisca referiu a escrita. Acrescentou, ainda, que os pensamentos e os filmes eram áreas de criatividade. A Gabriela referiu-se às artes, nomeadamente à música, ao teatro e à dança:

Em que áreas pensas que é possível ser criativo?	
Francisca:	"...na escrita, nos pensamentos, nos filmes,..."
Gabriela:	"...nas artes: música, teatro, dança,..."

Quadro 21 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre as áreas em que é possível ser criativo

Aparece aqui uma das poucas referências à música, apesar de se tratar de uma turma do ensino articulado, com três disciplinas no conservatório. As duas alunas consideraram possível ser-se criativo a Matemática. Quanto às justificações, apresentam-se a seguir:

É possível ser criativo a Matemática? Justifica?	
Francisca:	"Sim, porque podemos criar muitas coisas. Por exemplo para fazer um cubo todos os ângulos têm que ser retos e daí podemos criar outras figuras com seis faces mas sem ângulos retos."
Gabriela:	"Sim, porque com apenas pontos e segmentos de reta podemos criar novas figuras, novos objetos."

Quadro 22 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre a possibilidade de ser-se criativo a Matemática

As duas alunas declararam que se consideravam criativas. A Francisca referiu que discordava vigorosamente da ideia da criatividade ser um dom raro exclusivo de alguns, que era uma característica individual e que variava com a idade. A Gabriela manifestou uma posição similar nas duas últimas mas, pelo contrário assinalou a criatividade como um dom raro e exclusivo de alguns. Ambas concordaram que esta era uma capacidade fundamental e passível de ser desenvolvida e avaliada. A Francisca declarou discordar da impossibilidade de ser criativo a Matemática e do papel limitador exercido pela escola sobre a criatividade, ao contrário da Gabriela. Ambas concordavam que aulas de Matemática criativas eram essenciais para melhorar a aprendizagem dos alunos.

Quando questionadas sobre os modos de trabalho em sala de aula, ambas as alunas preferiam trabalhar em pares. As justificações podem ser observadas a seguir:

Como gostas mais de trabalhar na sala de aula? Justifica a tua opção?	
Francisca:	"Em pares, porque as pessoas podem comunicar melhor entre si, sem ser um trabalho individual ou de grupo."
Gabriela:	"Em pares, porque sozinha, distraio-me, em grupo de turma há muita confusão, e em pares ou pequeno grupo (dependendo das pessoas do grupo) trabalha-se melhor."

Quadro 23 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre os modos de trabalho em sala de aula

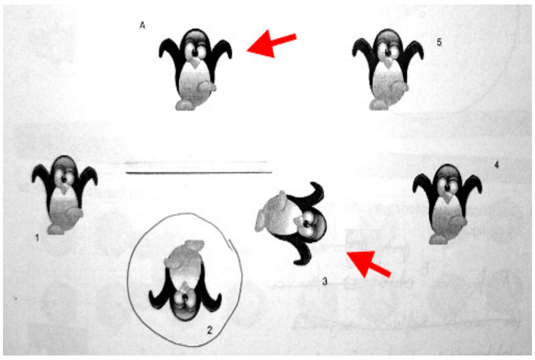
3.1. Conhecimento e Capacidades Geométricos

Como já se referiu nos dois casos anteriores, nesta secção pretende-se avaliar se e como os alunos realizaram a respetiva apropriação de conhecimentos e evoluíram nas capacidades de reconhecer, visualizar, representar e transformar formas geométricas assim como, de comunicar, raciocinar e resolver problemas, utilizando, quer o ambiente de "papel e lápis", quer o GeoGebra.

Pretende-se então verificar o impacto da abordagem nas alunas Francisca e Gabriela. Como já foi também referido, cruzaram-se os dados resultantes da observação das aulas com a informação obtida através das produções dos alunos, dos registos efetuados no Diário de Bordo e do teste. Também para este caso se optou por individualizar a análise ao teste (ver critérios de classificação do teste – Anexo 14), nas suas modalidades pré e pós, pelas mesmas razões referidas para o caso anterior.

3.1.1. Pré-Teste

Da observação das imagens extraídas da resposta primeira questão do pré-teste (ver figura 117), verifica-se que ambas as alunas possuem já uma noção, pelo menos intuitiva, de reflexão. O facto de desenharem um eixo revela alguns conhecimentos sobre a isometria. Apesar disto, as duas alunas assinalaram opções incorretas nas suas respostas.



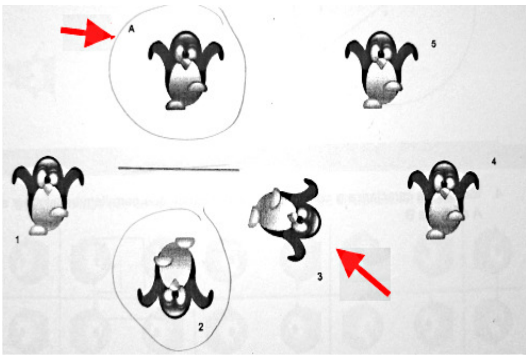


Fig. 117 - Resposta da Francisca (à esquerda) e da Gabriela (à direita) à primeira questão do pré-teste

Ambas, só voltam a ensaiar uma resposta à questão número oito, que solicitava uma "composição", em ambiente de "papel e lápis", utilizando diferentes isometrias (ver figura seguinte).

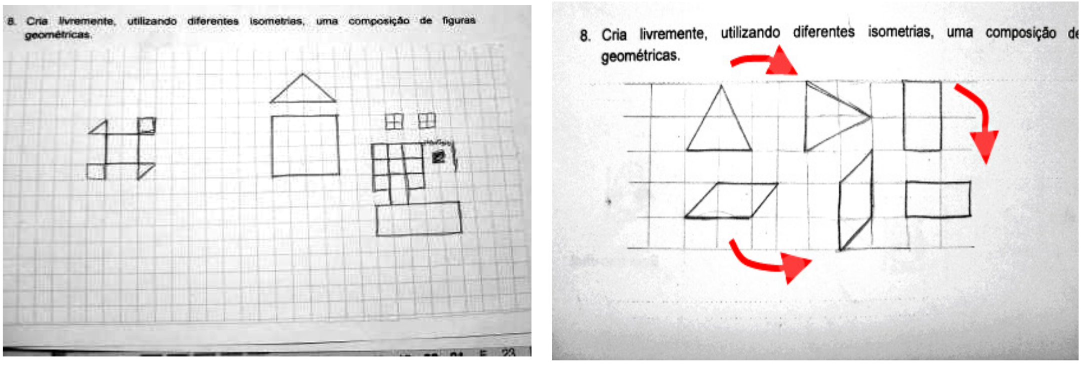


Fig. 118 - Resposta da Francisca (à esquerda) e da Gabriela (à direita) à oitava questão do pré-teste

A Gabriela limitou-se a desenhar três elementos, um triângulo e dois paralelogramos, que parece fazer rodar. Apesar de, e de forma muito informal, se referir a "virar", enquadrado num contexto de "movimento", não identificou qualquer centro, ângulo ou sentido de rotação. A aluna escreveu:

-"...fiz figuras e depois, num movimento, virei-as para dar as outras."

Na resposta da Francisca não são observáveis quaisquer vestígios de transformações geométricas. Esta ideia é corroborada pela ausência de resposta à questão seguinte, onde se solicitava uma explicação acerca dos procedimentos envolvidos na construção.

Nenhuma outra questão foi alvo de qualquer tentativa de resolução por parte das duas alunas.

3.1.2. Implementação da Sequência Didática

Tarefa I

A primeira tarefa, na qual se solicitava uma exploração relativamente informal de algumas "transformações" utilizando acetatos, miras, transferidores, compassos e réguas, e que suscitou, como já se viu anteriormente, um pequeno debate, com todos os alunos da turma, no sentido de recordarem a abordagem efetuada no Primeiro Ciclo, o grupo resolveu-a de forma célere e utilizando já terminologia específica do tema (Diário de Bordo, 16/04/2012). Repare-se, para o caso da reflexão (figura 119) na adequada posição dos eixos, horizontal e diagonal e o no vocabulário utilizado na descrição da transformação, isto apesar do nível de formalismo da tarefa permanecer bastante baixo.

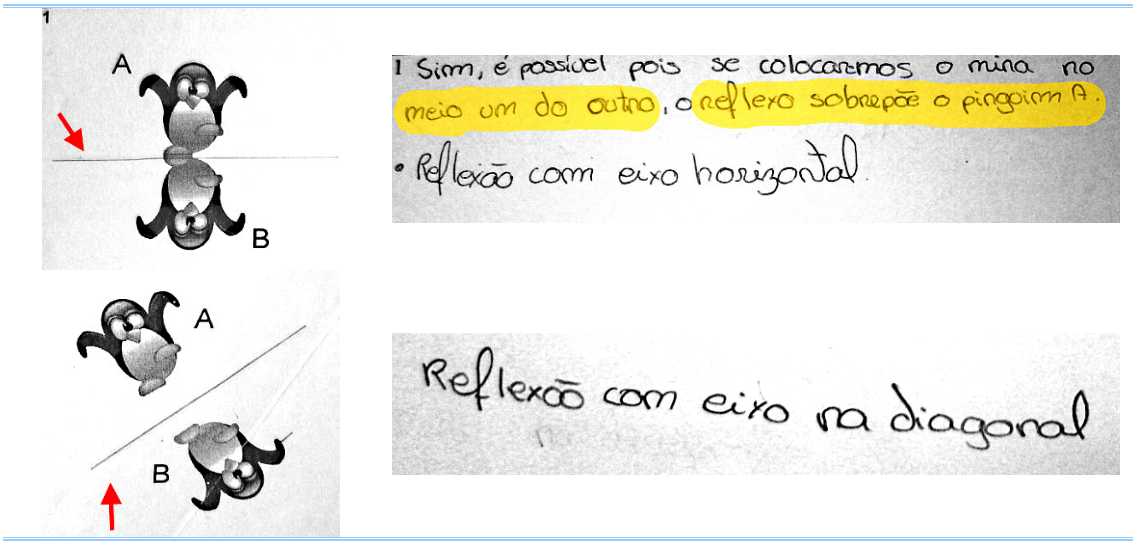


Fig. 119 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira e segunda questão da tarefa I - Reflexões

O grupo identificou, também, as figuras que continham rotações recorrendo a um acetato apenas no caso da rotação de 180º. Na caracterização destas rotações, o grupo utilizou também, ainda que de forma algo imprecisa, alguns termos associados a esta isometria. A utilização do transferidor para medir a amplitude dos ângulos de rotação revelou-se algo problemática para o grupo, como, aliás, para quase todos os alunos, como já foi referido. O grupo realizou também bastantes tentativas para determinar o centro de rotação utilizando, para isso, a régua, o compasso e a folha de acetato. O ponto foi descoberto (figura 120) por tentativa e erro e não através de um procedimento formal (Diário de Bordo, 16/04/2012).

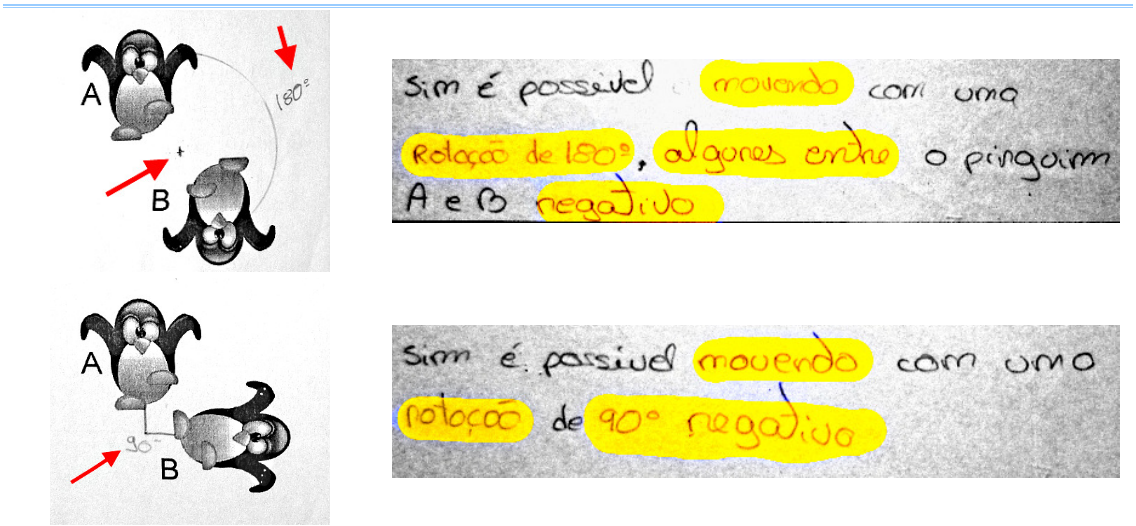


Fig. 120 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira e segunda questão da tarefa I - Rotações

Relativamente às duas situações que continham translações, pode-se observar, na figura seguinte, que as alunas definiram, também, um ponto no "pé do pinguim" como referência, medindo posteriormente a distância para estabelecer a medida de comprimento do vetor:

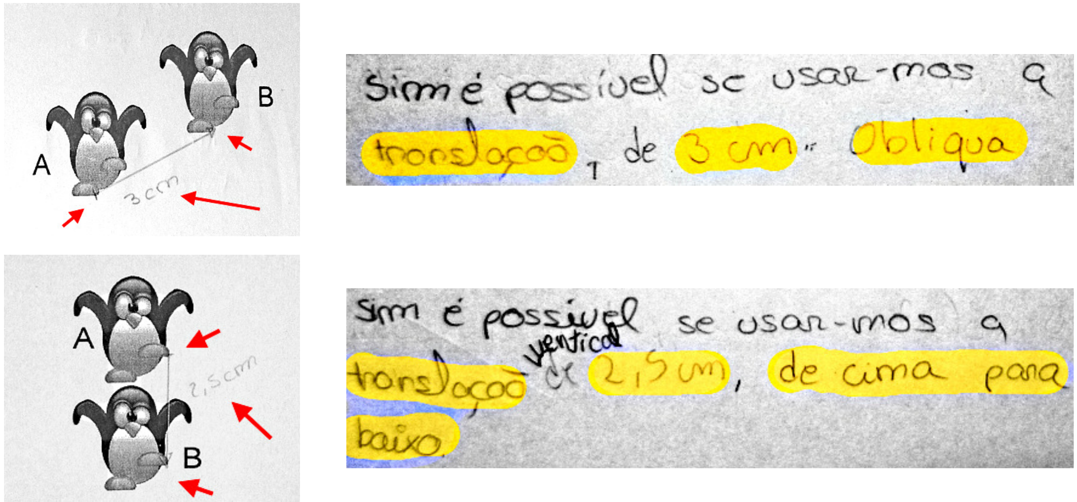


Fig. 121 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira e segunda questão da tarefa I - Translações

Note-se que o segmento de reta entre estes dois pontos foi orientado, estabelecendo claramente o objeto de partida e a sua imagem.

Na terceira questão, o grupo tentava, agora, replicar as diferentes transformações que tinham sido exploradas num ADGD, mais concretamente no GeoGebra. A questão foi resolvida também com um nível de proficiência assinalável, depois de exploradas, de modo conjunto com toda a turma, as ferramentas do menu "transformações". Como já se viu, foi nesta fase que a turma sentiu necessidade de entender o uso de seletores, essencialmente para poder controlar as rotações. Devido a um erro na aplicação, relacionado com o Java (Diário de Bordo, 16/04/2012), o grupo pôde apenas simular através de polígonos, e não com a imagem do pinguim, a rotação de 90º e a reflexão de eixo oblíquo (ver figura seguinte).

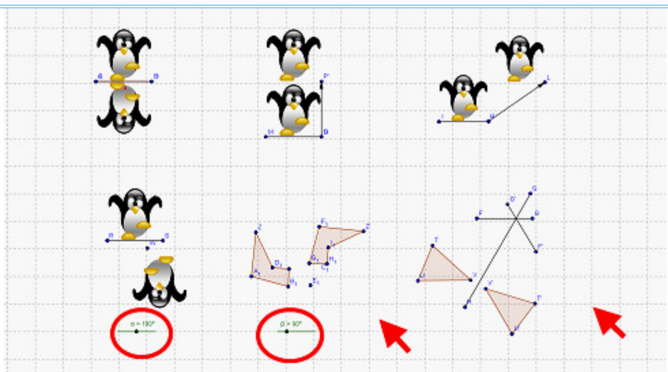


Fig. 122 - Resposta da Francisca e da Gabriela à terceira questão da tarefa I

Tarefa II

O grupo revelou já certa facilidade em identificar os eixos de reflexão, independentemente de serem horizontais ou oblíquos, quando com isto se confrontaram na primeira questão da tarefa II. Recorrendo ainda ao mira, estabeleceram a posição dos diferentes eixos associados às várias reflexões propostas. As dificuldades no traçar dos eixos, devido ao afastamento provocado pela espessura da ponta do lápis, não foram observáveis neste grupo. Quando confrontados pelo professor, sobre as distâncias dos objetos e respetivas imagens aos eixos, as alunas responderam:

-*"...tem que ser a mesma!"* (Diário de Bordo, 18/04/2012).

Nem sequer os "pinguins esquiadores" pequenos, pela sua situação de afastamento e pelo facto de se encontrarem numa posição obliqua relativamente ao papel, constituíram verdadeiramente uma situação de grande dificuldade para estas alunas. Este facto é observável através da análise da figura seguinte, onde se verifica a ausência de tentativas reiteradas, identificáveis por marcas de lápis no papel:

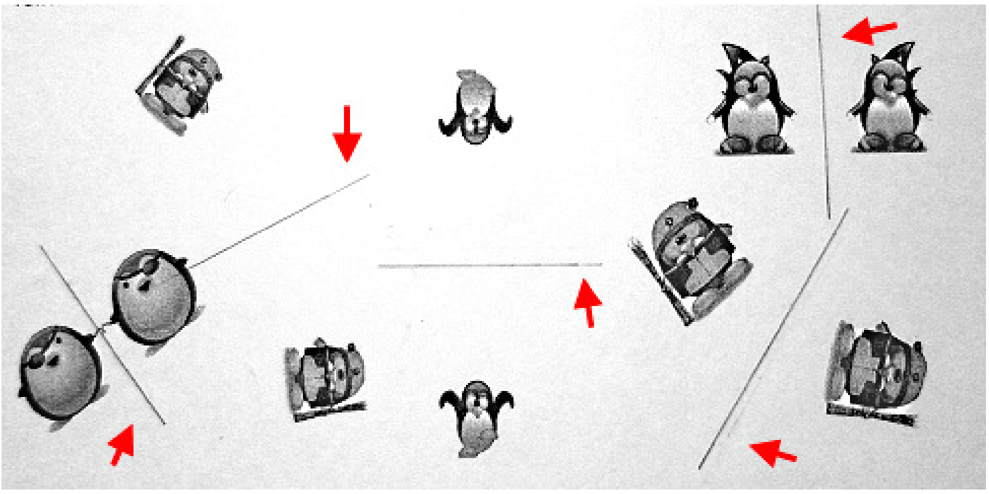


Fig. 123 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira alínea da primeira questão da tarefa II

Na reprodução em ADGD do trabalho efetuado em papel na alínea anterior, o grupo voltou a revelar grande facilidade em realizar as tarefas utilizando de forma intuitiva as caixas de ferramentas relacionadas com as retas e segmentos de reta e com as transformações geométricas. Note-se, também neste caso, que os alunos usaram como eixo de reflexão segmentos de reta por motivos de simplificação visual da "construção" (figura 124). Também aqui, no final da tarefa, foram "traçadas" as retas correspondentes a cada situação.

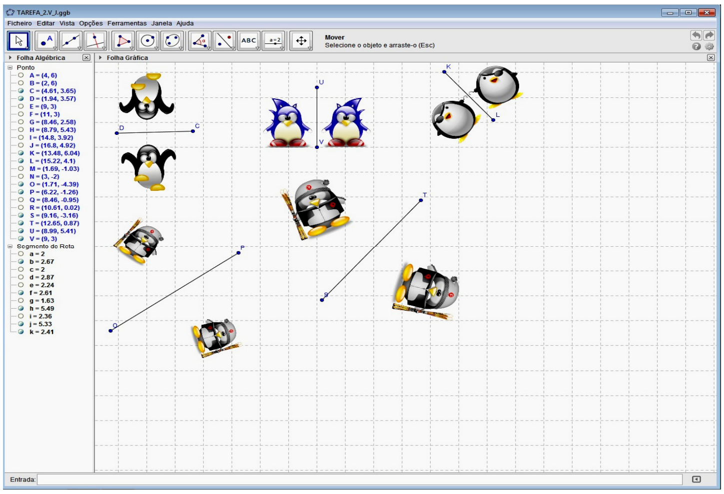


Fig. 124 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda alínea da primeira questão da tarefa II

Quando se procurava, na última questão da tarefa II, um maior grau de formalismo na noção de reflexão, o grupo concretizou de forma adequada todas as reflexões propostas (ver figura seguinte). Para este grupo, o caso onde o eixo de reflexão se encontrava numa posição oblíqua não constituiu dificuldade assinalável. O momento de verificação através do mira foi, para estas alunas, uma mera formalidade, pois demonstravam grande segurança e confiança nas soluções que tinham encontrado (Diário de Bordo, 18/04/2012).

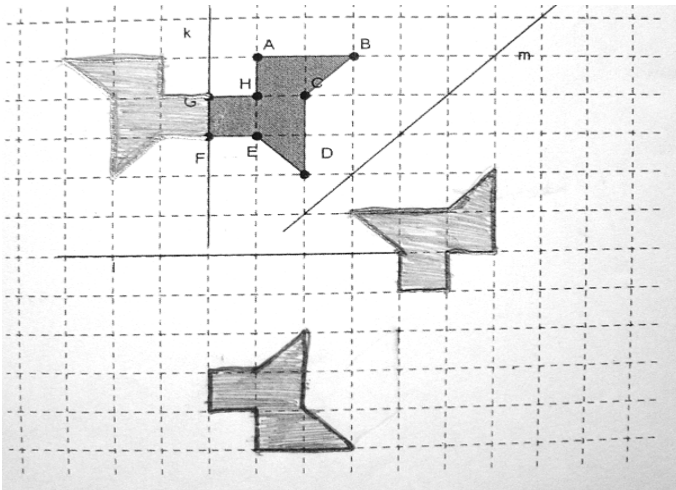


Fig. 125 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda questão da tarefa II

Neste grupo, não era tão evidente (sendo até quase imperceptível) a ideia que emergira com o grupo anterior acerca de uma provável maior facilidade que os alunos sentiriam na resolução das tarefas num ADGD, em contraponto com a resolução em "papel e no lápis".

Tarefa III

Esta ideia fortalece-se, também, na tarefa III, que tinha sido reformulada em função do que fora observado nas duas tarefas anteriores, no caso anteriormente descrito e noutros alunos da turma. Assim, quando se solicitou às alunas que, no GeoGebra, realizassem duas rotações de centro C para o mesmo polígono, com ângulos de + 120º e -120º, o grupo demonstrou grande facilidade na sua resolução, como se pode observar na figura seguinte:

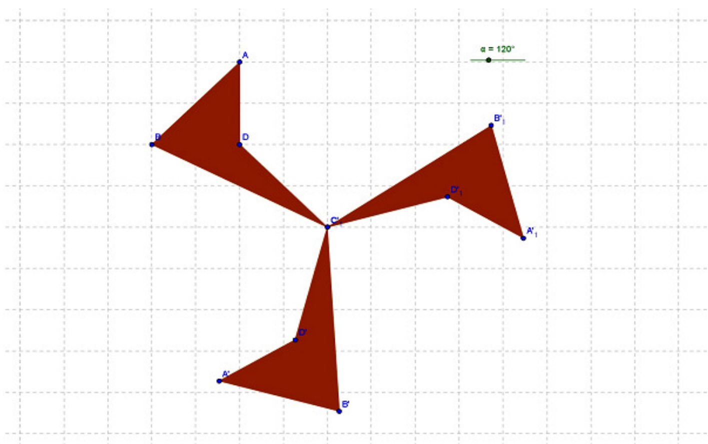


Fig. 126 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira questão da tarefa III

Em seguida pedia-se, na questão número dois, que realizassem o mesmo exercício num ambiente de "papel e lápis", com recurso a acetatos, transferidor e compasso. Apesar de alguma dificuldade inicial na manipulação do transferidor, o grupo chegou a uma solução correta (figura 128) e com total ausência de quaisquer orientações do professor (Diário de Bordo, 20/04/2012).

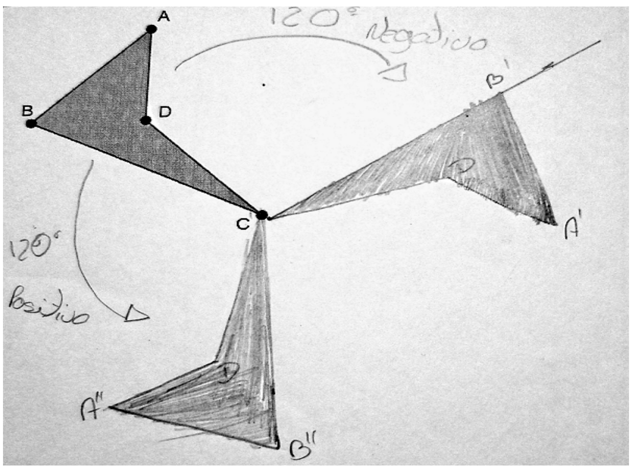


Fig. 127 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda questão da tarefa III

Na quarta questão, pedia-se uma descrição acerca do processo que deu origem a uma construção livre com rotações no GeoGebra (questão número 3, analisada mais adiante na secção 3.2). O grupo utilizou terminologia específica e adequada, identificando claramente a isometria utilizada, o centro, a amplitude e o sentido do ângulo associado.

Tarefa IV

Na resolução da primeira questão desta tarefa, na qual se solicitava aos alunos que descobrissem um conjunto de vetores que davam origem a uma série de imagens geradas por translação de um dado objeto, o grupo conseguiu representar estes vetores de forma autónoma constatando, por si próprio, a necessidade de "marcar" pontos no objeto e nas imagens que servissem de referência (figura 128). O grupo conseguiu definir os diferentes vetores na construção inicial e transpô-los para a área quadriculada em baixo.

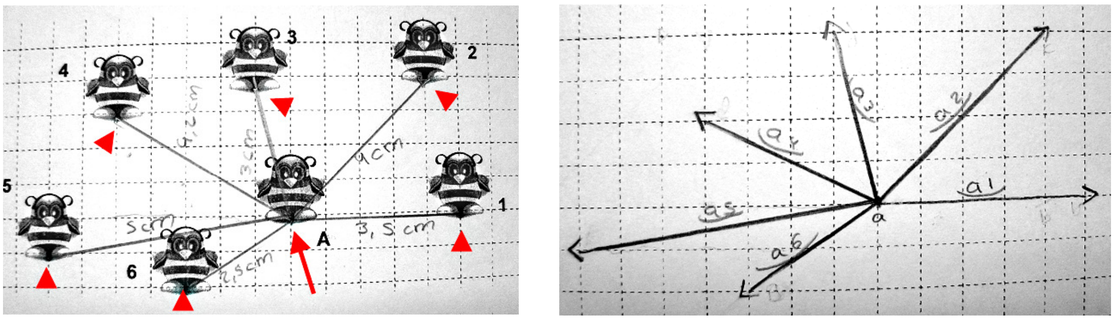
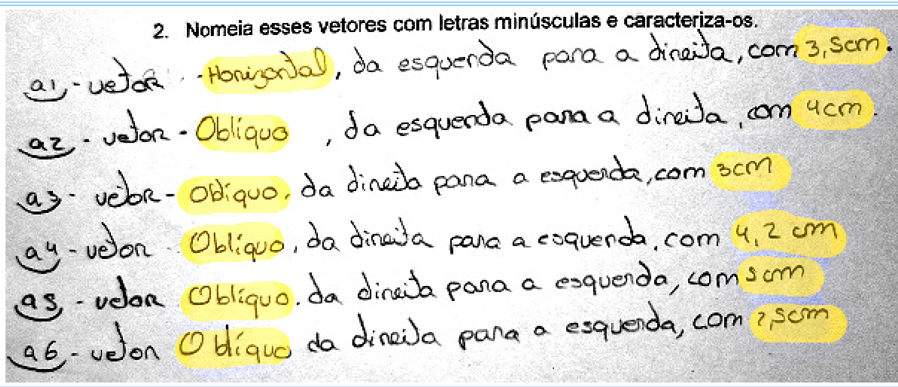


Fig. 128 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira alínea da primeira questão da tarefa IV

Como se pode observar na figura seguinte, o grupo fez a caracterização dos vetores que tinham sido encontrados, de uma forma bastante formal, revelando também um entendimento consistente do conceito. Atente-se na necessidade sentida pelas alunas de medir, com uma régua, o comprimento de cada vetor:


2. Nomeia esses vetores com letras minúsculas e caracteriza-os.

a1 - vetor · Horizontal, da esquerda para a direita, com 3,5cm.

a2 - vetor - Oblíquo , da esquerda para a direita, com 4cm.

a3 - vetor - Oblíquo, da direita para a esquerda, com 3cm

a4 - vetor Oblíquo, da direita para a esquerda, com 4,2 cm

a5 - vetor Oblíquo. da direita para a esquerda, com 5cm

a6 - vetor Oblíquo da direita para a esquerda, com 2,5cm

Fig. 129 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda alínea da primeira questão da tarefa IV

A segunda questão, na qual se solicitava que desenhassem, em ambiente de "papel e lápis", a imagem de uma figura obtida por uma translação associada a um vetor oblíquo predefinido, as alunas estabeleceram apenas a imagem sem definir especificamente qualquer ponto ou assinalar as imagens de cada um, como se pode observar na figura seguinte:

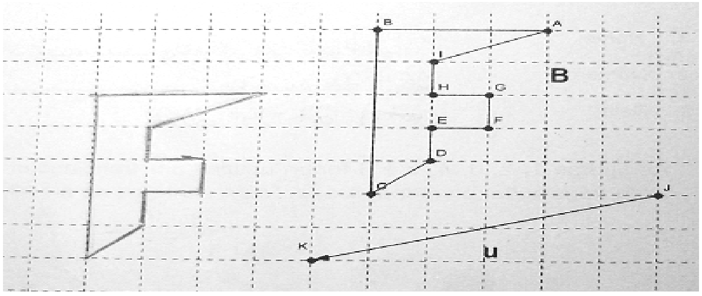


Fig. 130 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda questão da tarefa IV

Quando inquiridas sobre o que aconteceria à imagem se se alterasse a medida de comprimento do vetor (questão 2.1), as alunas responderam:

-"A imagem afasta-se ou aproxima-se. Depende do comprimento."

Sobre uma mudança da direção do vetor responderam:

*-"A imagem pode aparecer em qualquer lugar!" (*Diário de Bordo, 23/04/2012).

Tarefa V

Na primeira questão da tarefa V, realizada no GeoGebra, o grupo, para deslocar o pinguim para "dentro de casa", simulou primeiro, em "papel e lápis", uma tentativa parcial, tal como se pode observar na figura seguinte. Quando lhe pareceu que tinha encontrado um caminho consistente, passou então para o GeoGebra, onde utilizou uma reflexão de eixo horizontal, seguida de uma translação horizontal da esquerda para a direita, de uma rotação de 90º no sentido positivo e centro em ***Z***, e de uma reflexão que simultaneamente inverteu a orientação da última imagem e colocou o pinguim "dentro de casa".

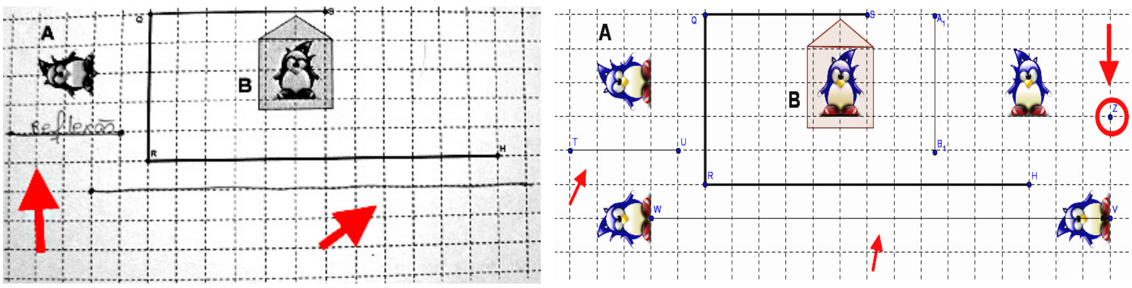


Fig. 131 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira alínea da primeira questão da tarefa V

Na descrição do processo usado para resolver a questão anterior, o grupo escreveu:

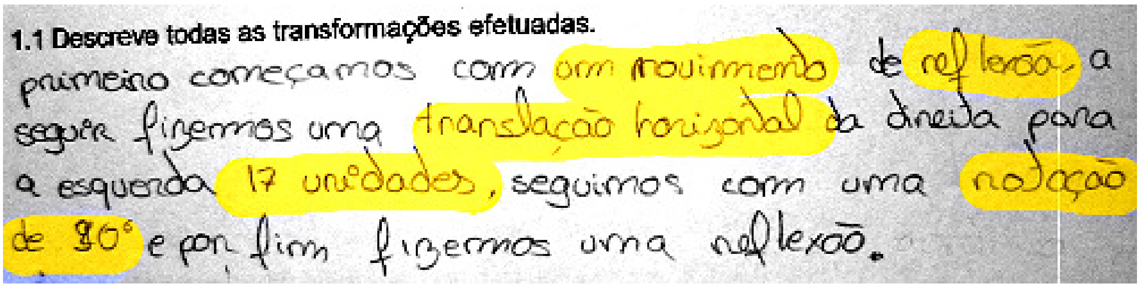

1.1 Descreve todas as transformações efetuadas.
primeiro começamos com um movimento de reflexão a seguir fizemos uma translação horizontal da direita para a esquerda 17 unidades, seguimos com uma rotação de 90° e por fim fizemos uma reflexão.

Fig. 132 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira alínea da primeira questão da tarefa V - Descrição

O grupo, através da resposta dada a esta questão, manifestou um entendimento notável, apesar de estar a um nível relativamente informal, das transformações envolvidas, sendo capaz de as conjugar e de as descrever com bastante precisão.

É interessante também verificar a necessidade que as alunas sentiram de abordar a tarefa, primeiro, através do papel e só depois evoluir para o ambiente computacional, tal como observado anteriormente no primeiro caso.

Na segunda questão, realizada também no GeoGebra, os alunos eram convidados a descobrir soluções, num contexto de composição de isometrias, que permitissem obter uma imagem a partir de um objeto. Para a situação 1, as alunas realizaram duas reflexões de eixos perpendiculares, primeiro na vertical e depois na horizontal. Na segunda situação, combinaram uma reflexão de eixo horizontal e uma translação com vetor paralelo ao eixo da reflexão.

Situação 1 | Situação 2

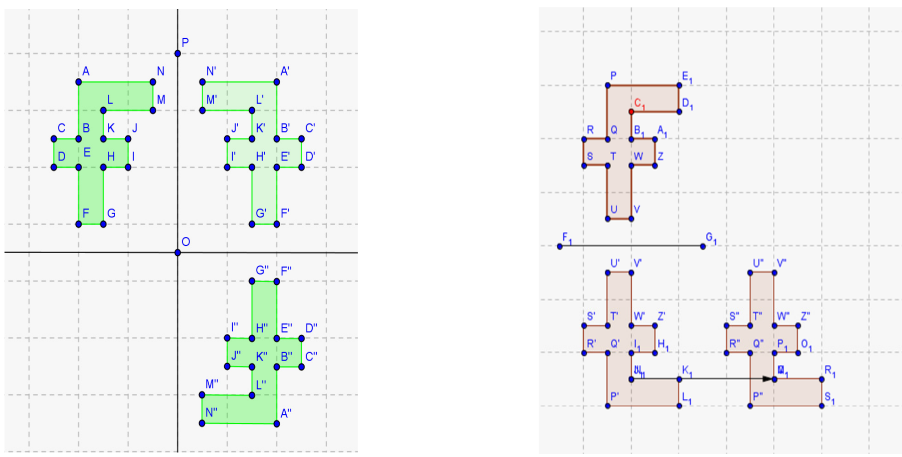
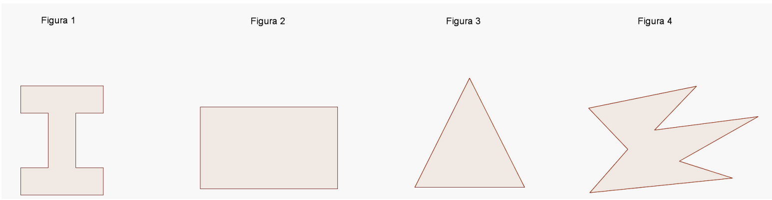


Fig. 133 - Resposta da Francisca e da Gabriela à primeira alínea da segunda questão da tarefa V

A resolução desta questão envolveu o grupo num processo de tentativa e erro com resultados satisfatórios em relativamente pouco tempo (Diário de Bordo, 23/04/2012). Quando solicitadas a descrever os processos utilizados em cada situação, as alunas utilizaram uma terminologia adequada para caracterizar os "movimentos" referindo que a primeira situação poderia ser resolvida através de uma meia-volta de centro ***O*** e que, na segunda, se poderia conjugar uma reflexão de eixo vertical com uma meia-volta com o centro "entre" as duas figuras. Note-se, também neste caso, que a solução proposta (não a descrita) pelo grupo para a segunda situação foi a ideal para a introdução do conceito de reflexão deslizante.

Tarefa VI

A tarefa VI centrava-se no conceito de simetria, mais concretamente, nas suas variantes por reflexão e rotacional. Este grupo também não escapou à confusão com a noção de reflexão que todos os alunos traziam do Primeiro Ciclo do Ensino Básico, como se pôde constatar através dos resultados do pré-teste e das intervenções e discussões que ocorreram. Como já se viu, a abordagem centrada na ideia de uma figura permanecer invariante depois de aplicada uma transformação implicou uma desconstrução prévia do conceito, partindo-se posteriormente para a primeira questão que, em ambiente de "papel e lápis", solicitou a exploração com um mira de diferentes figuras, onde se tentava perceber em que posições deveria ser colocado, de modo a que estas permanecessem invariantes. Solicitava-se também que os alunos preenchessem um quadro onde indicavam o número de eixos que tinham sido encontrados (eixos de simetria) e descrevessem sucintamente a sua posição (ver figura seguinte):



	Descrição da posição dos eixos	Número de eixos de simetria
Figura 1	eixo horizontal e vertical	2
Figura 2	eixo horizontal e vertical	2
Figura 3	eixo vertical	1
Figura 4		0

Fig. 134 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda alínea da primeira questão da tarefa VI

O grupo concluiu facilmente que a figura 4 não tinha qualquer eixo que obedecesse às condições estipuladas exclamando:

-"*...é impossível,...não há!*" (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Quando inquiridas sobre o número de eixos que esperavam encontrar no caso do círculo, responderam depois de uma pequena pausa:

-"*...muitos,...infinitos!*" (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Chegou-se, então, e depois de uma discussão que envolveu a turma, à "nova" noção de simetria, particularizando que, neste caso, acontecia por reflexão.

A confirmação deu-se na questão seguinte com a utilização do GeoGebra (figura 135). Verificou-se novamente a facilidade com que o grupo manipulava o ficheiro previamente preparado confirmando os resultados da abordagem inicial (Diário de Bordo, 30/04/2012).

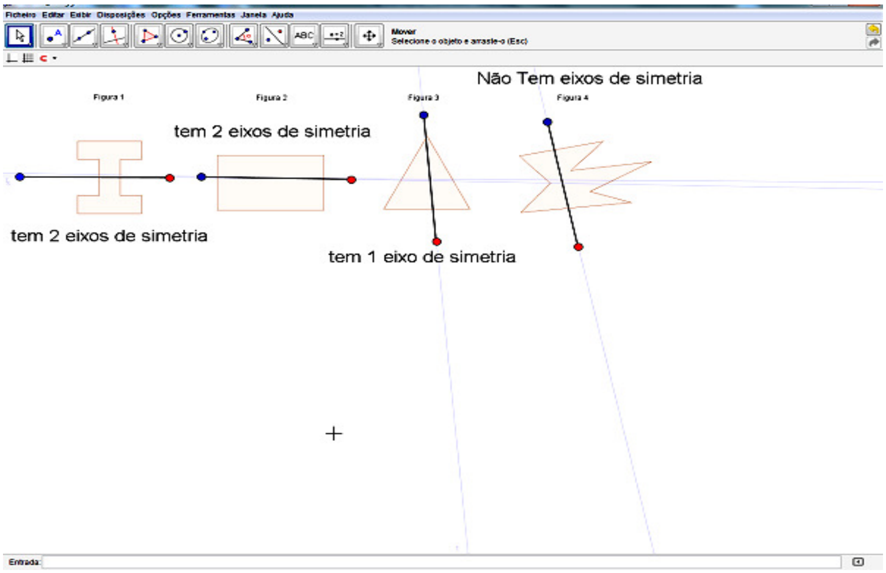
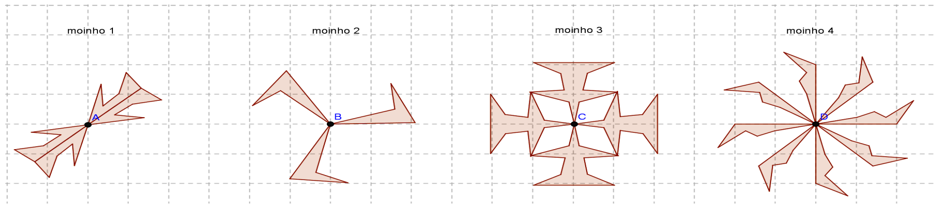


Fig. 135 - Imagem da manipulação de elementos na primeira alínea da segunda questão da tarefa VI

Na terceira questão, ao averiguar, para quatro "moinhos", e em ambiente de "papel e lápis", quais as rotações que deixavam as figuras invariantes, o grupo estabeleceu paralelismos com a tarefa anterior, chegando, com assinalável facilidade, à ideia de simetria rotacional. Na manipulação do transferidor, voltaram a observar-se dificuldades, sobretudo na seleção da escala (Diário de Bordo, 02/05/2012), que foram desaparecendo no decorrer da exploração. No final preencheram o quadro que se pode ver na imagem seguinte:



	Centro	Medida(s) da(s)amplitude(s) do(s) ângulo(s)	Relação entre a medida do menor ângulo e 360º	Número de pás do moinho
moinho 1	A	180º / 360º	360º - 180º = 180º	2
moinho 2	B	120º/240º/360º	360º - 120º = 240	3
moinho 3	C	90º/180º/270º/360º	360 ÷ 90 =	4
moinho 4	D	45º/90º/135º/180º 225º/270º/315/360º	360 : 45 =	8

Fig. 136 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda alínea da terceira questão da tarefa VI

Como se pode observar na figura anterior, a relação entre a medida de amplitude do menor ângulo e 360º não foi completamente estabelecida pelo grupo. As anotações sugerem uma tentativa de exploração que, primeiro, tenta duas subtrações para os moinhos 1 e 2. As alunas ensaiaram depois, divisões para os moinhos 3 e 4, mas não anotaram os quocientes na tabela, o que provavelmente as impediu de estabelecer a relação com o número de pás de cada moinho. Da discussão coletiva que ocorreu acerca expressão numérica que traduzisse a medida de amplitude de todos os ângulos associados às rotações que permitiam que as figuras apresentassem simetria, a Gabriela, em diálogo com outra colega de outro grupo, disse:

-*"... é **n** vezes a amplitude do ângulo mais pequeno!"* (Diário de Bordo, 02/05/2012).

Na questão seguinte, pedia-se a confirmação dos resultados utilizando o GeoGebra. Este processo, enormemente facilitado pelo uso dos "seletores", permitiu ao grupo consolidar algumas noções e foi desenvolvido com grande facilidade (figura 137).

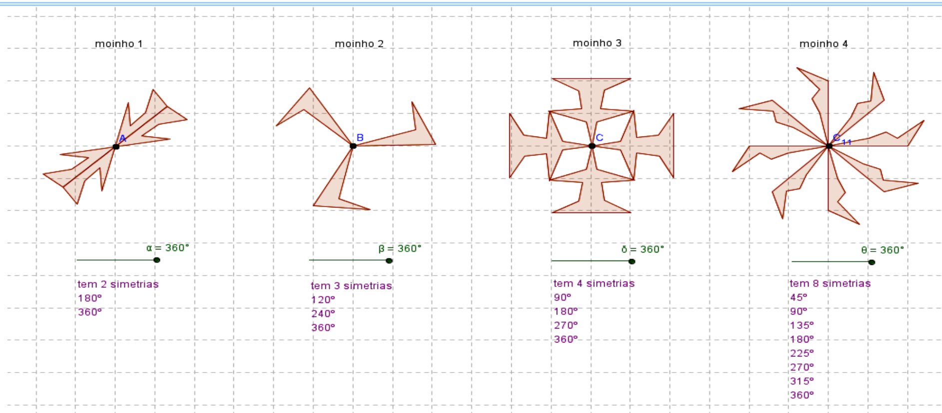


Fig. 137 - Imagem da manipulação de elementos na terceira alínea da terceira questão da tarefa VI

Tarefa VII

Aquando da exploração da tarefa VII, centrada no conceito de simetria translacional, o grupo desenhou um vetor horizontal, com sentido da esquerda para a direita, com 4 quadrículas de comprimento, como resposta à condição de deixar a figura invariante (figura 138). A exploração, feita em ambiente de "papel e lápis" e com a ajuda de um acetato, resultou divertida para o grupo.

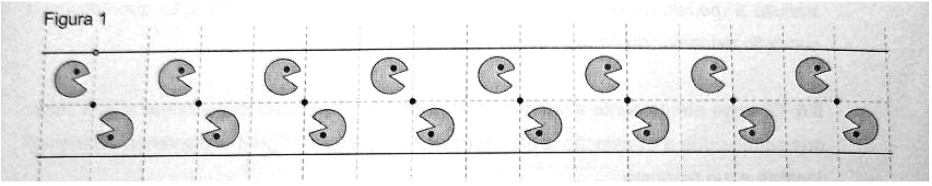


Fig. 138 - Imagem do friso da primeira questão da tarefa VII

As duas alunas perceberam, imediatamente, a ideia de manter a figura inicial invariante e, na questão seguinte, onde tinham de escolher, de uma lista, um conjunto de vetores que aplicados à imagem a mantivessem invariante, descartaram imediatamente todos os vetores não horizontais (figura 139). É interessante verificar que o vetor ***n***, com sentido da direita para a esquerda, não lhes causou qualquer estranheza, e foi selecionado (Diário de Bordo, 04/05/2012).

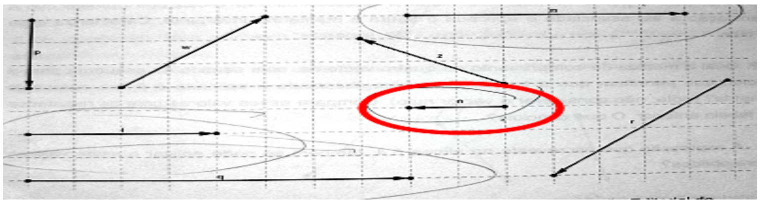
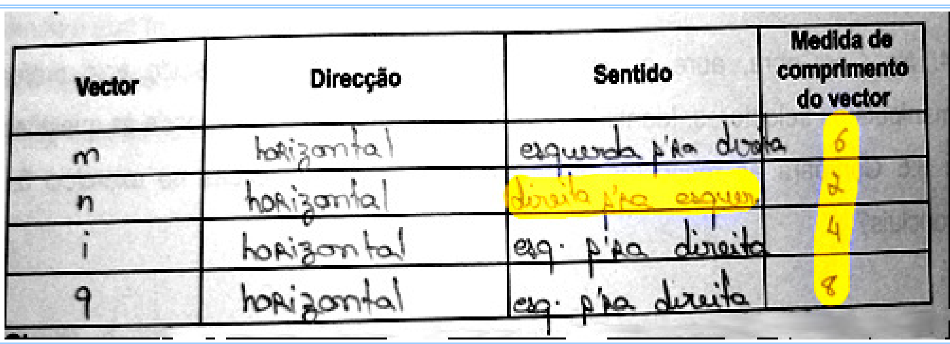


Fig. 139 - Resposta da Francisca e da Gabriela à segunda alínea da primeira questão da tarefa VII

Na questão seguinte, o grupo sintetizou os resultados num quadro fornecido para o efeito conforme se mostra na figura seguinte.



Vector	Direcção	Sentido	Medida de comprimento do vector
m	horizontal	esquerda p'ra direita	6
n	horizontal	direita p'ra esquer.	2
i	horizontal	esq. p'ra direita	4
q	horizontal	esq. p'ra direita	8

Fig. 140 - Resposta da Francisca e da Gabriela à terceira alínea da primeira questão da tarefa VII

Da observação da última coluna, relativa à medida de comprimento dos vetores, referiram tratar-se de números pares e estabeleceram, com relativa facilidade, a expressão algébrica que definia este conjunto.

Na alínea seguinte, as alunas concluíram facilmente que nenhum vetor poderia manter a nova figura invariante, tal como se observa na imagem seguinte:

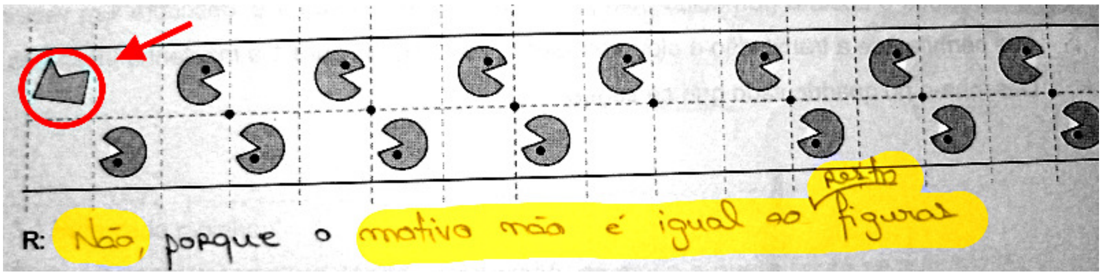


Fig. 141 - Resposta da Francisca e da Gabriela à quinta alínea da primeira questão da tarefa VII

A exploração desta questão aconteceu, como já foi referido, depois de uma adequada explicação sobre as diferentes maneiras de se obter um friso, com referências ao seu módulo e motivo. Isto explica a utilização de vocabulário específico que se observa na figura 141, embora, não da forma mais correta.

As questões seguintes desta tarefa, análogas às resolvidas com "papel e lápis", solicitavam agora o uso do GeoGebra na sua resolução.

O grupo abordou as tarefas com confiança e empenho. A utilização do GeoGebra era, para estas alunas, gratificante. Parecia, em alguns momentos, que se divertiam verdadeiramente na resolução dos problemas propostos apresentando, simultaneamente, uma grande capacidade de entender os processos e de operar com as ferramentas do programa (Diário de Bordo, 07/05/2012).

3.1.3. Pós-Teste

Da análise das respostas das duas alunas do grupo à primeira questão do pós-teste, verifica-se que ambas responderam corretamente, identificando a posição do eixo da única possível reflexão (figura 142). A Gabriela esqueceu-se de assinalar a imagem, mas a posição do eixo não deixa qualquer dúvida quanto à sua opção:

Reflexão

1. **Dos pinguins em seguida representados, descobre qual deles é uma imagem obtida por reflexão do pinguim A. Traça o respetivo eixo de reflexão.**

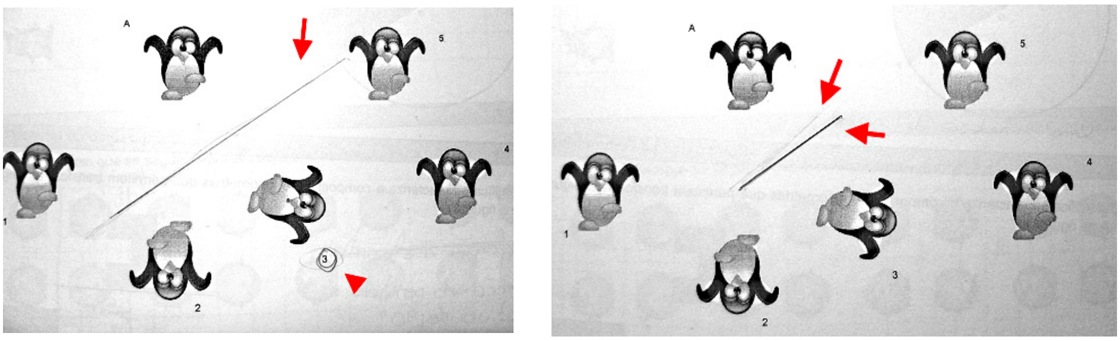


Fig. 142 - Resposta à primeira questão do pós-teste: da Francisca (à esquerda) e da Gabriela (à direita)

Das respostas à segunda questão, onde se solicitava que os alunos desenhassem os vetores associados a três translações, ambas responderam corretamente.

Quando se observam as respostas à questão número três (figura 143), verifica-se que as alunas responderam de forma sucinta, mas correta:

Rotação

3. **Na imagem que se segue, o ponto O é o centro do círculo. Os arcos AC, CD e BD são congruentes. Caracteriza a rotação que transforma a figura 1 na figura 2.**

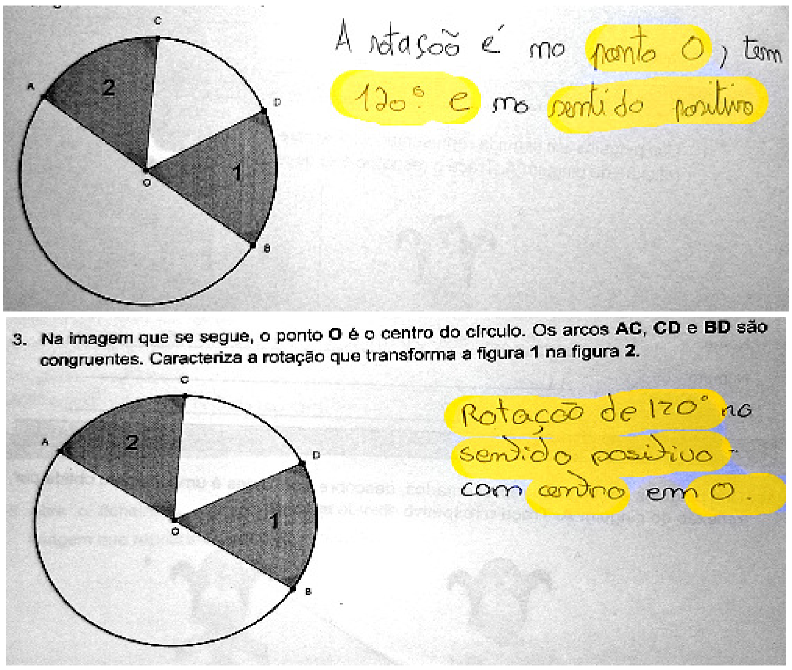


Fig. 143 - Resposta da Francisca (em cima) e da Gabriela (em baixo) à terceira questão do pós-teste

Na quarta questão, a Francisca parece "arrepender-se" de explicitar uma composição (palavras cortadas) de isometrias e propôs um rotação com uma medida da amplitude correta mas cujo centro se encontra indefinido, pelas suas palavras, *"...entre as figuras"* (ver figura seguinte).

Composição de isometrias

4. Identifica e caracteriza a composição de isometrias que permitem transformar a figura **A** na figura **B**.

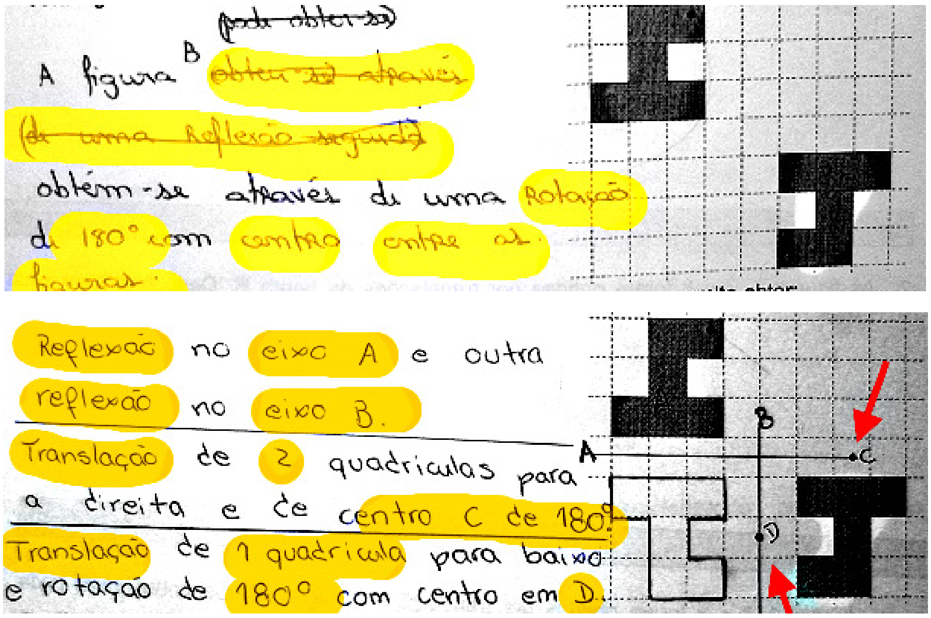


Fig. 144 - Resposta à quarta questão do pós-teste: da Francisca (em cima) e da Gabriela (em baixo)

A Gabriela propôs três possibilidades para a composição de isometrias que permitiriam "transformar" uma dada figura noutra. Se se observar detalhadamente a sua resposta, percebe-se que a aluna, embora cometendo um pequeno erro na definição dos vetores associados às translações, conseguiu visualizar estas transformações de forma extraordinária. Se a primeira proposta é uma dupla reflexão de eixos perpendiculares, a segunda implica conjugar uma translação na horizontal para a direita e cujo vetor teria uma medida de comprimento de 6 quadrículas (a aluna refere 2 quadrículas apenas porque se trata da distância entre o "fim" da primeira figura e o início da nova posição) com, ainda que tenha omitido o termo, uma rotação de 180º e centro em ***C***. Este ponto, de difícil determinação, está desenhado na figura. A terceira forma é semelhante à anterior, tendo a aluna cometido o mesmo erro na medida de comprimento do vetor. Não deixa, no entanto, de revelar uma capacidade notável para ver "o que não está lá" e demonstrar um conhecimento muito sólido do que é uma isometria.

Quando se observam as respostas à pergunta número cinco (figura 145), constata-se um grau de "acerto" bastante elevado com pequenas incorreções ou omissões. A Francisca identificou corretamente todas as isometrias envolvidas mas, estranhamente, absteve-se de caracterizar a primeira e a última. Quando na segunda alínea o fez, referiu que o sentido do vetor da translação é da direita para a esquerda, o que está incorreto. Este erro, provavelmente, teria a sua origem na forma como está feita a pergunta, referindo primeiro a imagem e só depois, o seu objeto correspondente. A Gabriela, ainda nesta questão, e como se observa na mesma figura, identificou corretamente todas a isometrias mas a sua caracterização é algo vaga e/ou imprecisa. Referiu mesmo, na reflexão deslizante, um eixo ***t*** que não assinalou.

5. Observa a imagem que se segue. Caracteriza a isometria que permite obter:

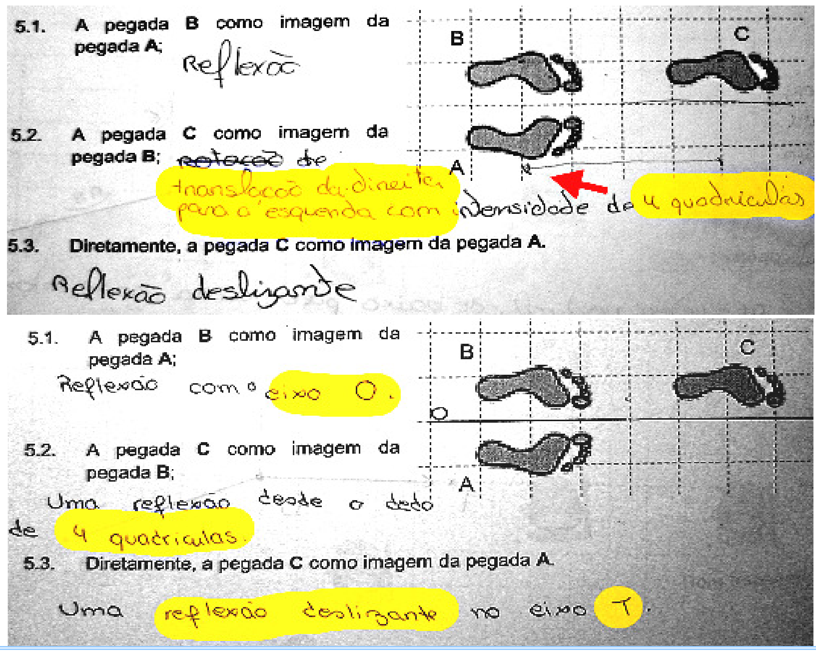


Fig. 145 - Resposta da Francisca (em cima) e da Gabriela (em baixo) à quinta questão do pós-teste

A questão número seis foi resolvida no computador com recurso ao GeoGebra. Através das imagens (figura 146), é possível concluir que as duas alunas chegaram a soluções muito diferentes na resolução deste problema. A Francisca propôs uma resolução "minimalista" onde utiliza uma reflexão de eixo vertical, situado a nove quadrículas do objeto, seguida de uma rotação de 90º no sentido positivo e centro em ***Z.*** Note-se a presença de um seletor para controlar a medida da amplitude do ângulo. A descrição que produziu é bastante precisa:

*-"Fiz uma reflexão de eixo vertical. Depois fiz uma rotação de 90º no sentido negativo e com o centro em **Z**. "*

A Gabriela optou por uma solução algo mais complexa, substituindo uma rotação de 90º por uma dupla reflexão de eixos oblíquos. O ângulo entre estes foi determinado por tentativa e erro, pelo que, a aluna provavelmente nem se apercebeu que teriam de fazer entre si um ângulo de 45º. Terminou com uma translação na horizontal, cujo vetor, com sentido da esquerda para a direita, tinha um comprimento de catorze quadrículas. A aluna descreveu, sucinta mas precisamente, o processo:

-"Dupla reflexão de eixos oblíquos. Translação para a direita com 14 quadrículas".

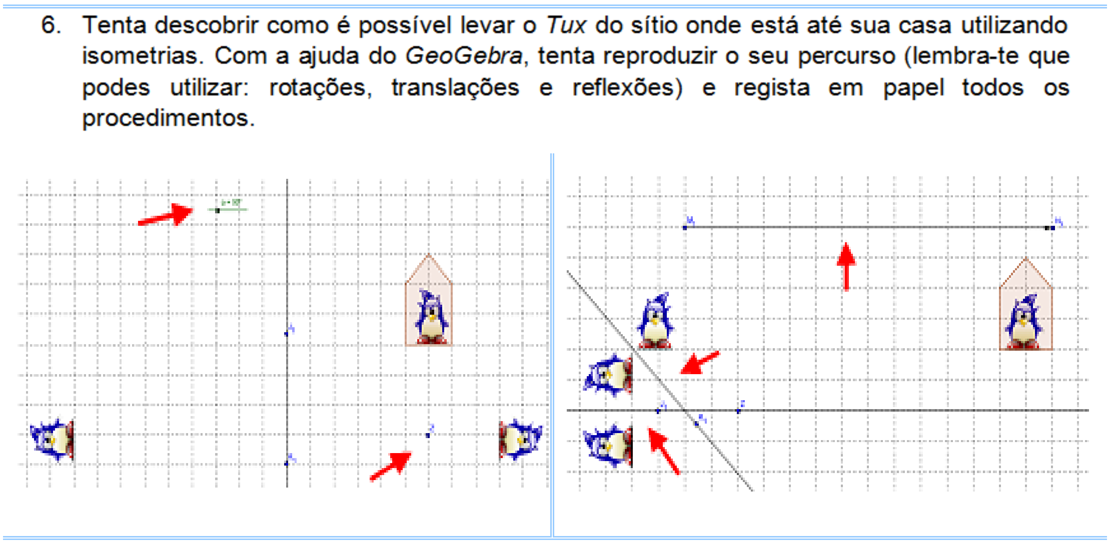


Fig. 146 - Resposta à sexta questão do pós-teste: da Francisca (à esquerda) e da Gabriela (à direita)

Na sétima questão, solicitava-se aos alunos que descrevessem duas formas distintas de obter um dado friso. A Francisca, de forma incompleta, fez um esboço (ver figura seguinte), aplicando uma reflexão de eixo vertical aos dois primeiros pinguins referindo também as subsequentes translações, e a medida correta de comprimento do vetor.

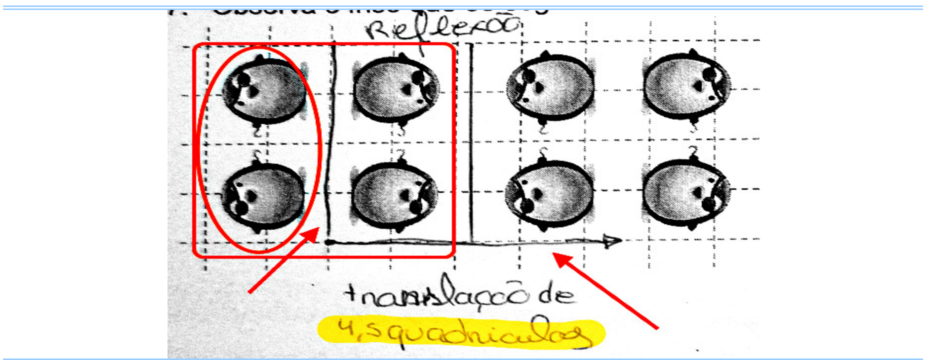


Fig. 147 - Anotações da Francisca no friso da sétima questão do pós-teste

A Gabriela escreveu aquilo que se pode ver na figura seguinte:

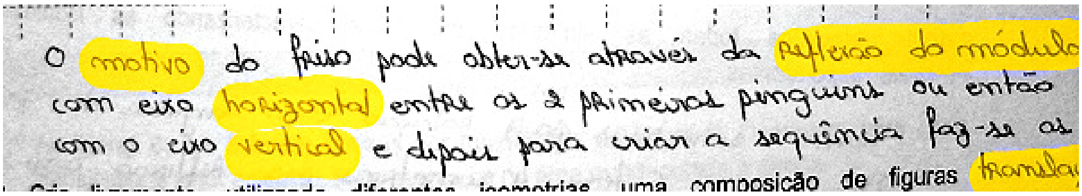
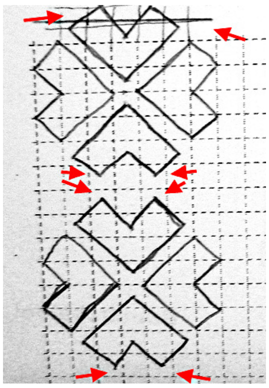

O motivo do friso pode obter-se através da reflexão do módulo com eixo horizontal entre os 2 primeiros pinguins ou então com o eixo vertical e depois para criar a sequência faz-se as translaç

Fig. 148 - Anotações da Gabriela no friso da sétima questão do pós-teste

A aluna propôs duas formas baseadas em reflexões de um módulo para gerar um motivo. Finalmente, referiu que, *"...para criar a sequência faz-se translações"*. Note-se a utilização de uma linguagem bastante formal, de forma correta e precisa.

Na pergunta número oito, ao criar no papel, utilizando diferentes isometrias, uma "composição de figuras geométricas", a Francisca optou por uma "composição" bastante complexa cujo processo de construção descreveu da seguinte forma (ver figura seguinte):

8. Cria livremente, utilizando diferentes isometrias, uma composição de figuras geométricas.



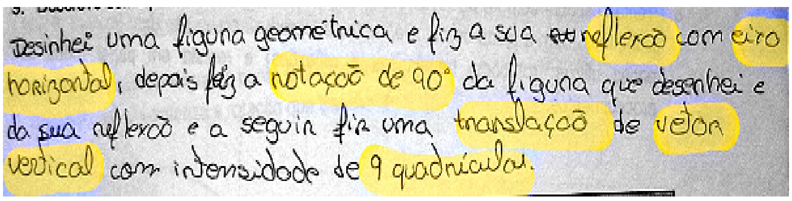
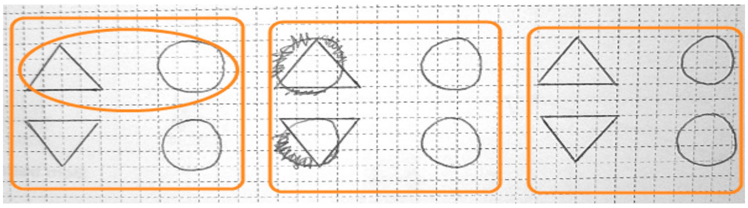

Desinhei uma figura geométrica e fiz a sua reflexão com eixo horizontal, depois fiz a rotação de 90° da figura que desenhei e da sua reflexão e a seguir fiz uma translação de vetor vertical com intensidade de 9 quadrículas.

Fig. 149 - Respostas da Francisca à oitava (resolução) e nona (descrição) questões do pós-teste

Repare-se no grau de dificuldade da proposta (figura anterior). Pode observar-se que os vértices nem sempre coincidem com o "quadriculado".

Ainda na questão número oito, a Gabriela, por sua vez, construiu um friso, a partir de formas mais ou menos informais, mas com bastante rigor nos processos, como se depreende das suas palavras (ver figura seguinte):

8. Cria livremente, utilizando diferentes isometrias, uma composição de figuras geométricas.



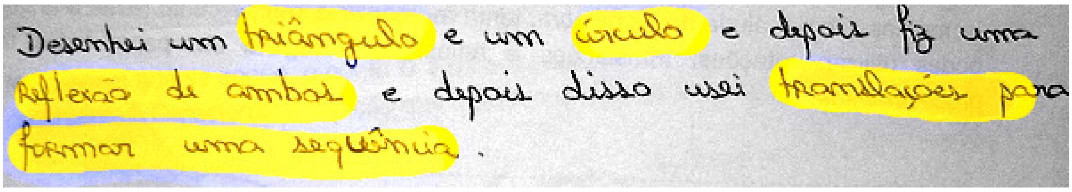

Desenhei um triângulo e um círculo e depois fiz uma reflexão de ambos e depois disso usei translações para formar uma sequência.

Fig. 150 - Resposta da Gabriela à oitava (resolução) e nona (descrição) questões do pós-teste

Na última questão do pós-teste, relacionada com o conceito de simetria e realizada no computador, ambas as alunas identificaram e caracterizaram corretamente as quatro reflexões e rotações que permitiam à figura permanecer invariante (figuras 151a e 151b). Estas alunas também ensaiaram esboços de resolução no papel mas foram omissas relativamente à posição do centro de rotação.

10.1 Identifica todas as simetrias da figura caracterizando as isometrias correspondentes.

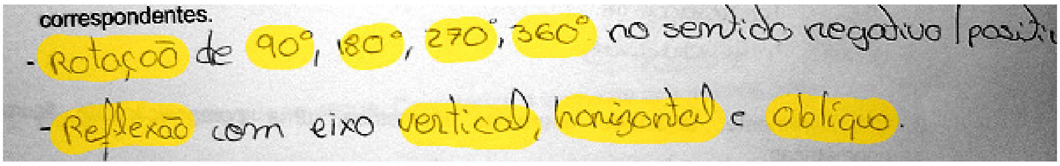

correspondentes.
- Rotação de 90°, 180°, 270°, 360° no sentido negativo/positi
- Reflexão com eixo vertical, horizontal e oblíquo.

Fig. 151a - Resposta da Francisca à décima questão do pós-teste

10.1 Identifica todas as simetrias da figura caracterizando as isometrias correspondentes.

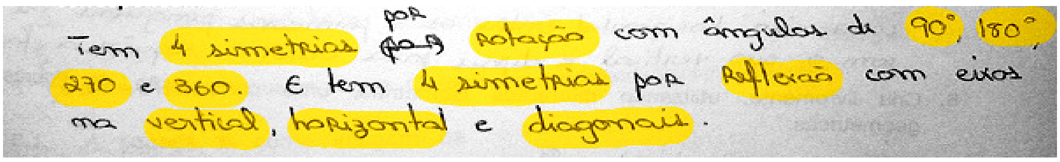

Tem 4 simetrias por rotação com ângulos de 90°, 180°, 270 e 360. E tem 4 simetrias por reflexão com eixos na vertical, horizontal e diagonais.

Fig. 151b - Resposta da Gabriela à décima questão do pós-teste

Na tabela seguinte, mostra-se os resultados comparativos, para as duas alunas, no teste efetuado - modalidade pré e pós:

Questões	Cotação	Francisca		Gabriela	
		Pré-teste	**Pós-teste**	Pré-teste	**Pós-teste**
Questão 1 - reflexão	10	0	**10**	0	**10**
Questão 2 - translação	10	0	**10**	0	**10**
Questão 3 - rotação	10	0	**10**	0	**10**
Questão 4 - composição	8	0	**6**	0	**8**
Questão 5.1 - reflexão	6	0	**3**	0	**6**
Questão 5.2 - translação	6	0	**4**	0	**4**
Questão 5.3 - ref. deslizante	6	0	**3**	0	**4**
Questão 6 - cmp. iso. ADGD	8	0	**8**	0	**8**
Questão 7 - frisos	8	0	**5**	0	**8**
Questão 8 - construção livre	8	0	**8**	5	**8**
Questão 9 - descrição	10	0	**10**	0	**10**
Questão 10 - simetria	10	0	**9**	0	**9**
	Totais:	0	**86**	5	**95**

Tabela 20 - Resultados da Francisca e da Gabriela ao pré e pós-teste (%)

Da análise da tabela anterior, constata-se uma evolução muito significativa das duas alunas. A Francisca, que apresentava no início deste estudo o perfil de uma aluna de nível 4, aproxima-se do limiar do nível 5. A Gabriela, que oscilou entre o nível 4 no primeiro período e o nível 5 no segundo, consolida-se no nível 5.

Ao analisar-se as respostas das alunas à IV secção do Questionário Final, constata-se também um grau de concordância máximo de ambas as alunas sobre as implicações da forma como foi implementado o tópico na compreensão do que são isometrias, na formação dos frisos e no entendimento do conceito de simetria. Referiram *que "...explica-se claramente"; "....ajuda a perceber as isometrias..."; "...podemos criar os frisos e ver as formas de os fazer!"; "...praticamente somo nós que descobrimos quando estamos no GeoGebra!" .*

As duas alunas declararam também concordar que aprofundaram outros conhecimentos de Geometria e desenvolveram a sua capacidade de resolver problemas. A Francisca referiu ainda que:

-"...o GeoGebra está feito para aplicarmos outros conhecimentos de Geometria."

A Gabriela declarou finalmente:

-"As aplicações são todas para nos fazer entender a Geometria. Somos nós que temos que descobrir como se resolvem aqueles problemas propostos pelo professor... é um grande desafio!"

3.2. Criatividade

Este grupo apresentou também trabalhos com uma originalidade assinalável, que se distinguiam dos realizados por boa parte dos alunos da turma. Estas alunas revelaram grande abertura e recetividade às ideias e sugestões propostas por colegas e pelo professor (Diário de Bordo, 20/04/2012). Como pode observar-se na resposta deste grupo à quarta questão da tarefa I (figura 152), na qual nem sequer utilizaram os pinguins para a realização da construção livre utilizando isometrias, o grupo produziu uma abordagem muito convencional, ensaiando uma reflexão e uma rotação de um polígono:

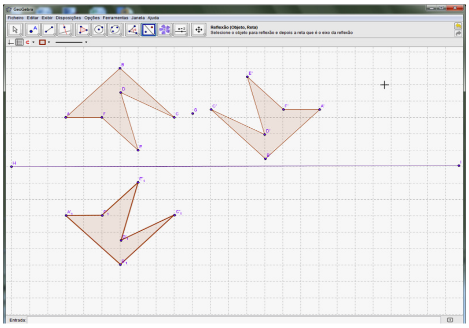


Fig. 152 - Primeira resposta da Francisca e da Gabriela à quarta questão da tarefa I

Quando solicitaram a opinião do professor sobre o trabalho, este respondeu que estava bem elaborado mas que iria mostrar outros, de outros alunos, "algo diferentes" daquilo que tinha sido apresentado até aquele momento. Toda a turma foi confrontada com algumas produções, marcadamente originais, feita por alunos de outras turmas. Perante o assombro generalizado, o grupo reagiu imediatamente solicitando refazer a tarefa (Diário de Bordo, 16/04/2012). Então propuseram duas novas construções, as quais se podem observar na imagem seguinte:

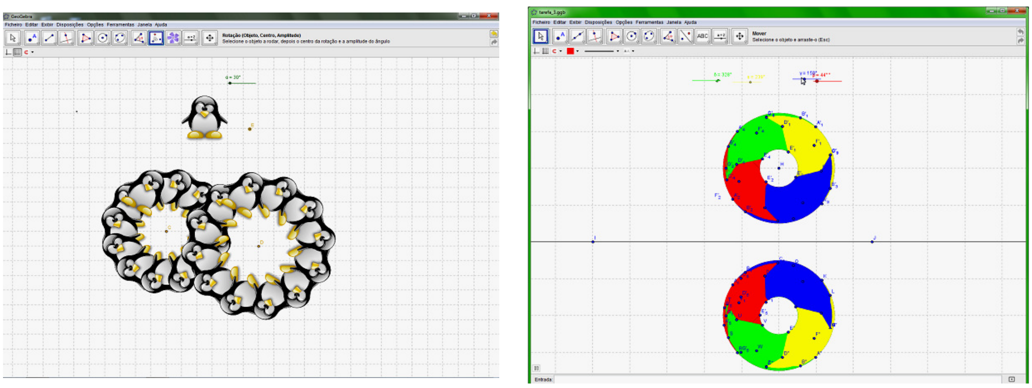
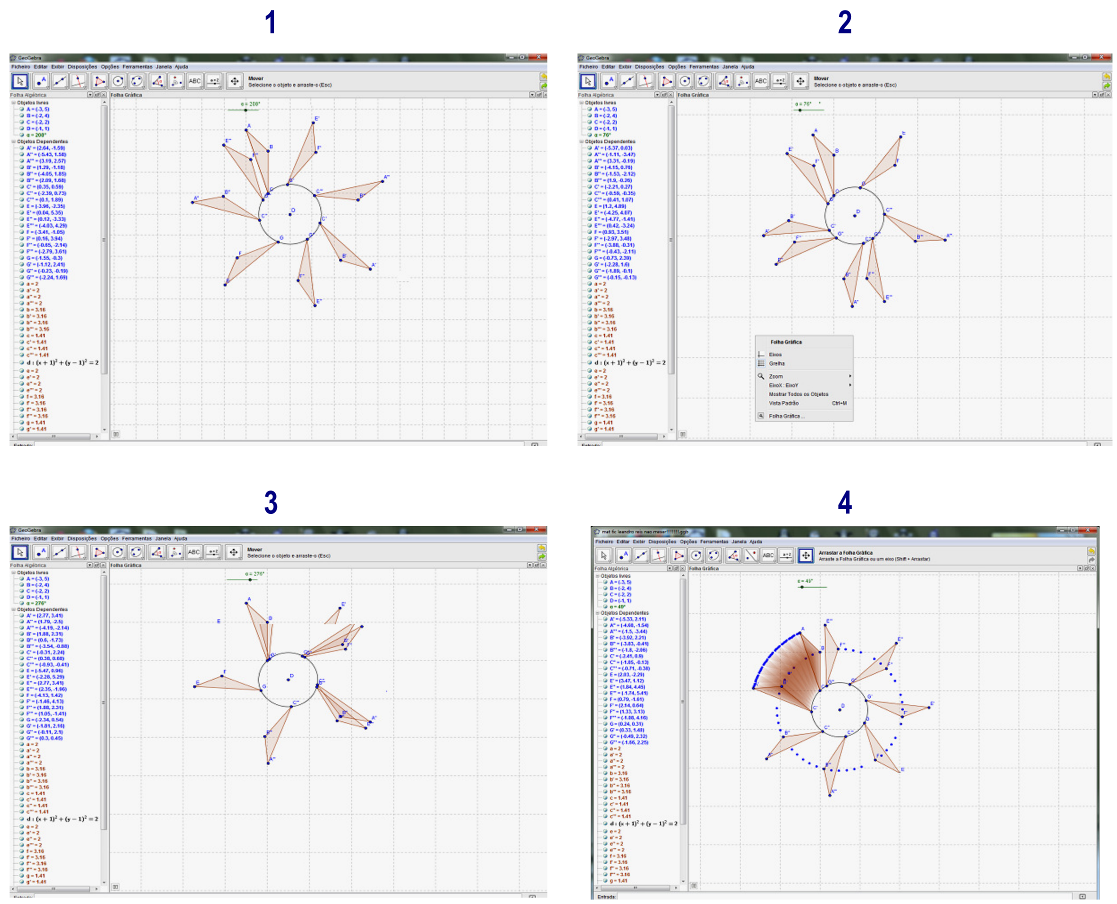


Fig. 153 - Segunda e terceira resposta da Francisca e da Gabriela à quarta questão da tarefa I

Observe-se o uso de seletores para controlar as rotações, a inclusão de elementos como imagens, a manipulação de cores e "ativações do traço". Foi interessante constatar a mudança de atitude, que se manteve nas tarefas posteriores, particularmente ao nível da motivação e no grau de envolvimento nas atividades. Aqui, como no caso analisado anteriormente, o grupo sentiu a necessidade de fazer de forma diferente quando confrontado com a criatividade exibida em outros trabalhos. Não só o fizeram como propuseram duas novas abordagens, uma só com rotações e outra envolvendo rotações e uma reflexão. Este trabalho foi também exibido em grande plano para toda a turma, levando outros alunos a, também eles, optarem por abordagens diferentes. Constatou-se, também, que o grupo incorporou elementos novos, adaptando ideias e estratégias. Isto resultou claramente do momento de confronto mencionado anteriormente (Diário de Bordo, 16/04/2012).

Na terceira questão da tarefa III, na qual se solicitava uma construção livre envolvendo apenas rotações (figura 154), o grupo elaborou uma construção que, pela sua complexidade, se encontra retratada na sequência de imagens que se segue:



5 6

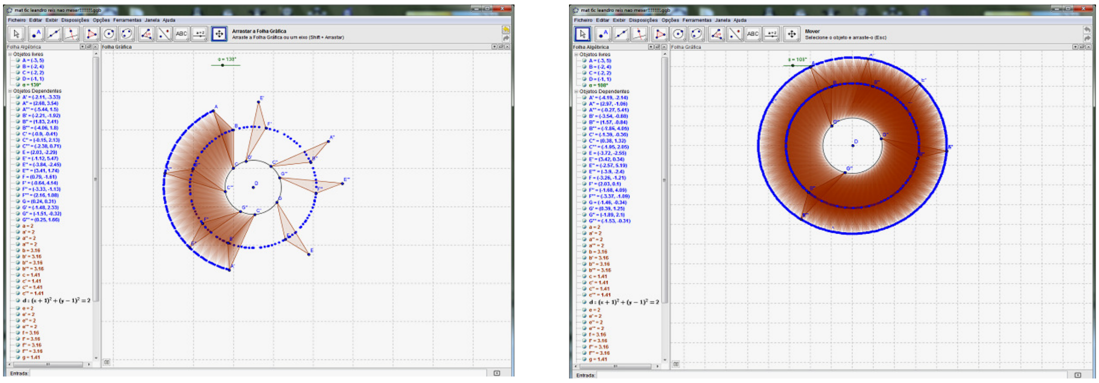


Fig.154 - Resposta da Francisca e da Gabriela à terceira questão da tarefa **III** - sequência de imagens

Repare-se, novamente, na utilização de um seletor, neste caso "animado", para definir a amplitude dos ângulos de rotação e "ativação do traço" para produzir o efeito de "arrasto". É uma produção muito original, que explora diversos processos simultaneamente, o que revela uma certa fluência. O grupo continuava a manter uma atitude muito recetiva às sugestões de colegas e do professor e apreciava a valorização que se fazia da espetacularidade do seu trabalho (Diário de Bordo, 20/04/2012).

Na questão número três da tarefa IV, centrada na translação, observaram-se resultados semelhantes. O grupo realizou uma abordagem incorporando também elementos da reflexão (não visível na imagem) para construir a estrela amarela. Seguiram-se quatro translações que permitiram obter as outras estrelas que foram pintadas de outras cores (figura 156). Note-se a colocação dos vetores afastados da construção e a disposição "simétrica" da construção.

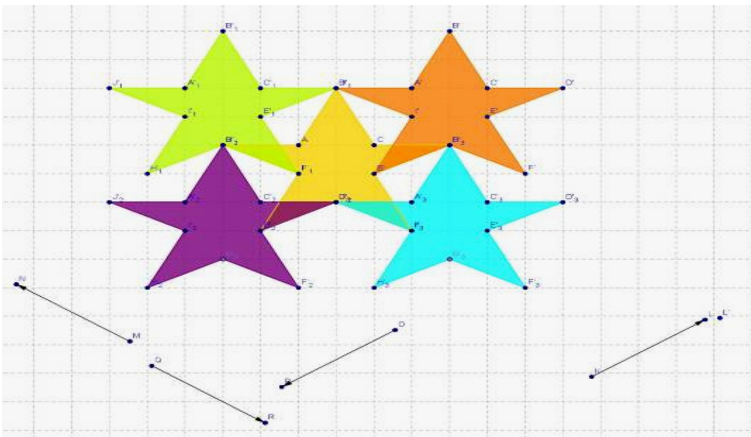


Fig. 155 - Resposta da Francisca e da Gabriela à terceira questão da tarefa IV

Apesar de grande simplicidade, este trabalho voltava a contrastar com as abordagens mais "convencionais" efetuada pela maioria dos alunos da turma, que se limitavam a construir um ou dois polígonos, aos quais aplicavam translações de uma forma, aparentemente, aleatória (Diário de Bordo, 23/04/2012).

Na terceira questão da tarefa V, o grupo produziu um trabalho pautado pela simplicidade mas de grande criatividade. Veja-se a sequência de imagens seguinte:

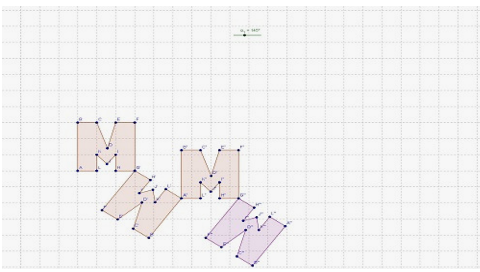
1

2

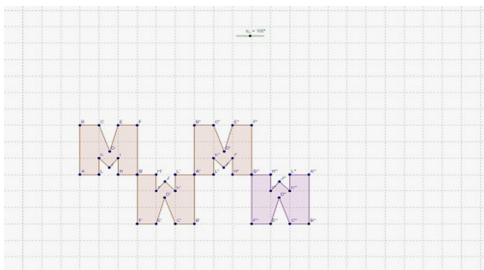
3

4

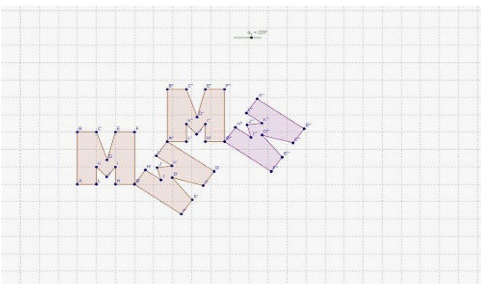
5



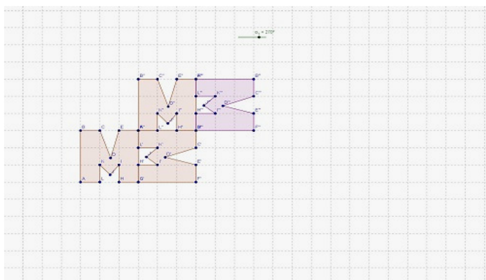
6



7



8



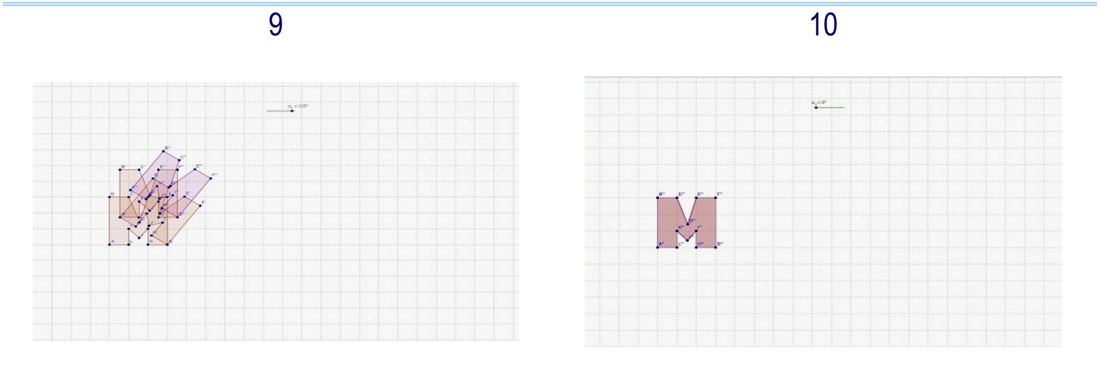


Fig. 156 - Resposta da Francisca e da Gabriela à terceira questão da tarefa V - sequência de imagens

A construção parte de um único polígono com a forma de um ***M***. Em seguida, estabelece uma série de três rotações, em cadeia, com centros de rotação num vértice da imagem imediatamente anterior. A medida da amplitude dos ângulos de rotação é controlada por um seletor animado. O resultado visual, impossível de traduzir numa sequência de imagens estáticas, é um movimento sucessivo e gracioso de extensão e contração em arco dos elementos que compõem a construção. Este trabalho, de grande singularidade, implica a existência de múltiplas ideias e conceções, assim como de uma enorme capacidade de as adaptar e conjugar entre si. Revela necessariamente originalidade, fluência e flexibilidade. Demonstra criatividade. A projeção em grande plano deste trabalho provocou um aplauso espontâneo de toda a turma (Diário de Bordo, 30/04/2012).

Na questão número quatro da tarefa VI, apesar da "disciplina" visual da simetria, o grupo elaborou também uma construção muito simples mas não menos original (ver figura seguinte).

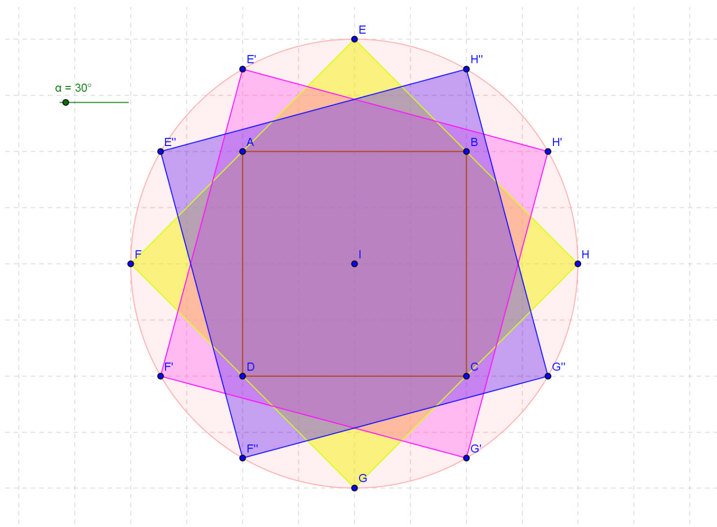


Fig. 157 - Resposta da Francisca e da Gabriela à quarta questão da tarefa VI

Observe-se a existência de múltiplas simetrias rotacionais, proporcionadas por rotações em série controladas por um único seletor, assim como simetrias por reflexão.

O friso, produzido no GeoGebra no âmbito da resposta à questão quatro da tarefa VII (figura 158), foi elaborado a partir de uma reflexão de eixo horizontal de um módulo que se assemelha à cabeça de um gato, seguido de translações:

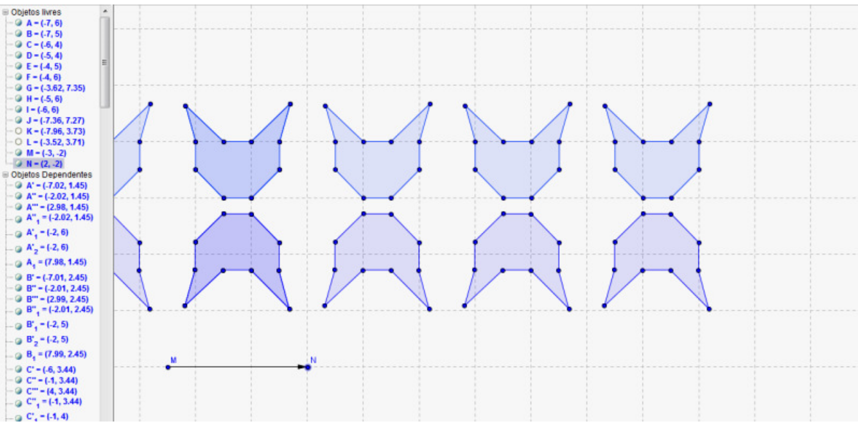


Fig. 158 - Resposta da Francisca e da Gabriela à quarta questão da tarefa VII

A análise deste caso parece legitimar a ideia de que a utilização do ADGD facilita a realização das transformações aumentando a fluência e flexibilidade, com implicações significativas na originalidade dos produtos apresentados.

Se, no caso anterior, se observava uma diferença assinalável, em termos de criatividade, nos produtos das tarefas realizadas em "papel e lápis" e nos realizados no GeoGebra, neste caso, essa diferença não foi tão vincada, com as alunas a recorrerem, por diversas vezes, a ensaios preliminares em "papel e lápis".

A necessidade de estabelecer um ambiente de verdadeira partilha e colaboração, livre da crítica destrutiva e onde os alunos possam discutir e analisar os seus trabalhos de forma conjunta, parece constituir-se como essencial. A observação de outros trabalhos, marcadamente criativos, provocou reações muito positivas nestas alunas, que as levou a uma mudança de atitude ao longo de toda a implementação da sequência didática.

Da análise das respostas destas duas alunas à III secção do questionário final, relativa à criatividade, verifica-se que ambas as alunas declararam concordar plenamente que as tarefas "tradicionais" limitam a criatividade dos alunos e que aulas de Matemática criativas são essenciais para melhorar a sua aprendizagem. Ambas as alunas referiram considerar-se então, mais criativas e discordaram que ser criativo é difícil assim como que as tarefas propostas não contribuíram para desenvolver a sua criatividade. A Francisca manifestou uma forte concordância que observar os trabalhos de outros alunos a levou a querer ser mais criativa. Este aspecto foi também assinalado desta forma pela Gabriela. As alunas expressaram, também, a sua forte concordância que gostar da tarefa a realizar aumenta a sua criatividade. A Gabriela referiu discordar da possibilidade de se avaliar e treinar a criatividade nos alunos. A Francisca assinalou o contrário sobre a primeira, mas declarou não acreditar que a criatividade seja passível de ser treinada. Enquanto que a Gabriela expressou que não imaginava ser possível produzir trabalho criativo a Matemática a Francisca manifestou uma visão contrária sobre este aspecto.

À pergunta sobre se as tarefas propostas teriam sido criativas, ambas responderam que sim, e justificaram:

As tarefas propostas nas aulas foram criativas? Justifica.	
Francisca:	"Sim... tivemos que criar e ao mesmo tempo aprender e isso facilitou-nos a aprendizagem."
Gabriela:	"Sim... porque havia vezes em que podíamos criar trabalhos ao nosso gosto."

Quadro 24 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre a natureza criativa das tarefas

Quando inquiridas sobre se os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos, ambos responderam também afirmativamente referindo-se ao facto de o professor partilhar o trabalho com todos, emitir opinião e "guardar" os trabalhos.

Os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos? Justifica.	
Francisca:	"Sim...porque os dava como exemplo aos outros alunos."
Gabriela:	"Sim...porque o professor dava a sua opinião para melhorar o s trabalhos dos alunos."

Quadro 25 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre a valorização dos trabalhos criativos dos alunos

Quando inquiridas sobre o que achavam que distinguia um trabalho criativo de outro pouco criativo, as alunas escreveram:

O que achas que distingue um trabalho criativo de outro pouco criativo?	
Francisca:	"...tem que ser imaginativo, qualquer coisa que não existe."
Gabriela:	"...tem que conter coisa variadas."

Quadro 26 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre os traços distintivos de um trabalho criativo

3.3. Atitudes Face à Matemática

A descrição que se segue, tem, também, por base o cruzamento de dados obtidos a partir do Diário de Bordo, do Questionário Inicial e do Questionário Final, secção V, relativa ao domínio atitudinal dos alunos face à Matemática, em geral, e à Geometria em particular, dos alunos Francisca e Gabriela.

A Francisca revelava, no final deste estudo empírico, uma maior autoconfiança. De facto, esta aluna passara a intervir mais vezes nas discussões expressando mais abertamente as suas opiniões. A aluna, que apresentara inicialmente um pensamento algo estereotipado evoluíra para uma forma de estar e atuar mais aberta e flexível. O sucesso na resolução das tarefas, a qualidade das suas produções e o seu desempenho no pós-teste parecem ter sido decisivos. A aluna, apesar de continuar a revelar uma certa timidez revelava outra atitude (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências). A Gabriela continuava assertiva e confiante.

Ambas envolviam-se, na resolução das tarefas, com a Gabriela a assumir, o papel de líder do grupo mas num estilo de liderança "partilhada" (Diário de Bordo, 20/04/2012).

Quando inquiridas, no Questionário Final sobre as implicações da forma como foi abordado o tópico, através do recurso ao GeoGebra, numa visão mais positiva da Geometria e da Matemática, tanto a Francisca como a Gabriela manifestaram um grau de concordância elevado com este aspecto, justificando:

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para uma visão mais positiva da Geometria porque...	
Francisca:	"Sim... porque podemos criar!"
Gabriela:	"Sim... podemos criar tudo em geometria utilizando o GeoGebra."

Quadro 27 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre o impacto da abordagem do tópico no desenvolvimento de uma visão mais positiva da Geometria

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para uma visão mais positiva da Matemática porque...	
Francisca:	"Sim... podemos aprender Matemática através de um computador."
Gabriela:	"Sim.. podemos aprender de forma criativa!"

Quadro 28 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre o impacto da abordagem do tópico no desenvolvimento de uma visão mais positiva da Matemática

A Gabriela tinha declarado no Questionário Inicial, recorde-se, não gostar de Geometria. O sentimento em relação à Matemática em geral, e à Geometria em particular sofreu alterações no sentido positivo, sobretudo no caso da Gabriela. Ambas as alunas referem nas suas respostas (quadros 27 e 28) o termo criar e a Francisca menciona também o computador. Parece emergir daqui a ideia que a natureza mais aberta das tarefas, possibilitando variadas soluções e a aproximação tecnológica contribuíram, assim, decisivamente para a evolução registada. À semelhança dos casos anteriores, as alunas pareciam também divertir-se na resolução das tarefas, manifestando também o seu desagrado pelo final das aulas (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências). Este aspecto é legitimado quando declararam, também no Questionário Final, discordar que a abordagem tenha contribuído para tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora, e que a achavam mais interessante e divertida.

As alunas revelavam grande interesse e empenho nas tarefas, explorando, por diversas vezes, caminhos alternativos realizando um número de abordagens significativo, produzindo, também, também trabalhos de grande originalidade e qualidade. As alunas participavam ativamente nas discussões e manifestavam grande sensibilidade às apreciações (construtivas) dos colegas e às sugestões do professor:

-*"...vamos fazer outra vez. Pode-se melhorar!"* (Diário de Bordo, 16/04/2012).

-*"...o da Maria está mais giro! Fazemos outro!"* (Diário de Bordo, 30/04/2012).

-*"Professor! O que é que acha deste (trabalho)?"* (Diário de Bordo, múltiplas ocorrências).

Ambas as alunas, como já se viu, declararam considerar-se razoáveis a Matemática. A competência percebida sobre si próprias, no início do estudo empírico, parecia estar algo aquém da realidade. Esta visão sofreu uma evolução positiva ao longo deste estudo. A resolução muito bem sucedida das tarefas, os resultados do pós-teste foram bastante elevados, para as duas alunas. Ambas pareceram beneficiar também da forma como as tarefas formam implementadas e do trabalho em grupo. Refira-se, aliás, que este grupo era muito funcional. Estes fatores ditaram também, de forma análoga ao caso anterior, uma forma muito positiva de encarar as aulas de Matemática.

-*"...adoro as aulas de Matemática!"; "Podíamos ter aulas aqui (sala TIC) todos os dias"*;

-*"Professor, podemos fazer mais tarefas em casa?* (Diário de Bordo, 23/04/2012).

Observou-se também uma grande abertura, e até entusiasmo em corrigir alguns erros conceptuais iniciais, também no conceito de simetria e de reflexão:

-"*Ahh! Isto então é uma reflexão. E então... o que é uma simetria?"* (Diário de Bordo, 16/04/2012).

-*"Professor! Quando é que vamos falar na simetria?"* (Diário de Bordo, 16/04/2012).

-"...bem dizia o professor para esquecermos o que era um simetria" (Diário de Bordo, 02/05/2012).

Ambas as alunas sentiam-se bastante motivadas para o sucesso à disciplina. Colocavam dúvidas com grande frequência e tinham, também, uma noção clara sobre a importância da Matemática à luz das suas expetativas para o futuro. A Francisca queria ser engenheira e a Gabriela, médica (fonte: Projeto Curricular de Turma).

Quando inquiridas, no Questionário Final, sobre se a abordagem ao tópico as ajudou a desenvolver o seu pensamento geométrico, ambas manifestaram-se de acordo e redigiram as seguintes justificações (quadro seguinte):

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para desenvolver o pensamento geométrico...	
Francisca:	"Sim...assim descobrimos novas geometrias!"
Gabriela:	"Sim... vimos coisa novas, diferentes!"

Quadro 29 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre a relação entre a forma como foi implementado o tópico e o desenvolvimento do pensamento geométrico

Declararam também, como já vimos, que se sentiam agora mais criativas. Estas respostas sugerem que o nível da competência percebida para a aprendizagem terá aumentado.

As alunas manifestaram também, um alto grau de concordância quando declaram que os seus receios face à disciplina tinham diminuído e que o seu interesse pela disciplina aumentou (ver os dois quadros seguintes):

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para diminuir os meus receios face à Matemática...	
Francisca:	"Sim...assim percebe-se bem. Não se tem receio de errar!"
Gabriela:	"Sim... é mais fácil entender a matéria!"

Quadro 30 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre a relação entre a abordagem do tópico e a diminuição dos receios face à Matemática

A forma como foi implementado este tópico, com recurso ao GeoGebra contribuiu para aumentar o meu interesse pela Matemática...	
Francisca:	"Sim...porque é muito mais interessante e divertido!"
Gabriela:	"Sim... porque é mais interessante!"

Quadro 31 - Resposta da Francisca e da Gabriela sobre a relação entre a abordagem do tópico e o aumento do interesse pela Matemática

Note-se a utilização da expressão *"Não se tem receio de errar",* por parte da Francisca que, recorde-se, revelara alguns problemas de autoconfiança.

Aspectos relacionados com o prazer, necessariamente associado ao divertimento, constituíram os outros motivos apontados para uma relação menos ansiosa, e portanto, mais interessada pela Matemática.

Em síntese, pode-se afirmar-se que:

- os níveis de envolvimento, interesse e entusiasmo pela Matemática e pela Geometria elevaram-se para as duas alunas;
- a competência percebida para a aprendizagem aumentou;
- os níveis de ansiedade diminuíram.

CAPÍTULO IV

Conclusões

“Men will die upon dogma but will not fall victim to a conclusion."
John Henry Newman

Apresentam-se, neste capítulo, as principais conclusões, discutem-se alguns resultados, sobretudo no âmbito das três categorias de análise sobre as quais o estudo incidiu, referenciam-se as principais limitações e, finalmente, sugerem-se algumas recomendações para investigações futuras.

Pretendia-se, neste estudo, como já se viu, averiguar em que medida uma utilização adequada de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica enquadrados por um Sistema de Gestão (de atividades) de Sala de Aula (CMS) favorecia o desenvolvimento de competências matemáticas transversais e específicas nos alunos. Tencionava-se, em termos de objetivos, avaliar o impacto de uma abordagem das transformações geométricas no Segundo Ciclo do Ensino Básico, com recurso a estas ferramentas, no desenvolvimento: (i) de uma mais sólida apropriação de conceitos geométricos; (ii) da criatividade; e (iii) de uma atitude mais favorável em relação à Matemática.

Dentro de um paradigma construtivista, selecionou-se um método de natureza qualitativa, centrado num estudo de caso, em três unidades de análise, e desenvolvido num contexto próximo da lógica de investigação-ação.

O desenvolvimento deste estudo envolveu a estruturação de uma sequência didática para o tópico "Reflexão, rotação e translação", do tema "Geometria", a partir de uma trajetória de aprendizagem e com tarefas de cariz marcadamente exploratório (Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009; Canavarro, 2011).

Na recolha de dados, foram utilizadas as técnicas de análise documental, inquirição e observação direta. Os dados obtidos foram alvo de uma análise de conteúdo, orientada por categorias de análise que emergiram dos objetivos de investigação que se perseguiram e das próprias produções dos alunos.

1. Conclusões e Implicações do Estudo

Da observação direta e da análise ao Questionário Final, foi possível constatar a importância que os alunos atribuíram, de forma unânime, à abordagem marcadamente tecnológica do tópico, assim como à natureza das tarefas e à forma como foram resolvidas e discutidas e ao contributo no desenvolvimento da sua criatividade, acrescentando que esta era potenciada pelo facto de gostarem de realizar as atividades propostas. Os alunos referiram também, nas respostas a outras questões do mesmo questionário, o facto de as tarefas serem divertidas. Como sugerem Stein e Smith (2009) e Vale et al. (2012), um ensino para a criatividade tem de ser, por sua vez, criativo, onde a natureza desafiante das tarefas, baseadas na resolução e formulação de problemas, explorações e investigações, seja capaz de promover o pensamento criativo (Vale, 2011). Neste contexto, foi reconhecido pelos cinco alunos constituintes dos casos que a criatividade é uma capacidade fundamental, tendo a Catarina, a Luísa e a Gabriela declarado achar que a escola limita o seu desenvolvimento. Robinson e Aronica (2009) explicitam esta conclusão e Alencar e Fleith (2003a) referem-se à motivação intrínseca na tarefa como catalisador da criatividade.

Um dos fatores que assumiu, desde logo, grande preponderância neste estudo e que parece assumir um papel decisivo é o da construção de um ambiente de sala de aula que permita a realização de tarefas de cariz verdadeiramente exploratório, cujo grau de abertura (Ponte, 1995) permita explorar diferentes caminhos e propor múltiplas soluções (Tavares, 2012). Este ambiente deve ser um espaço de liberdade, onde os alunos se sintam "a salvo" da crítica destrutiva como referem Fleith e Alencar (2005). E deve ser um espaço de confronto e discussão de ideias, capaz de gerar dinâmicas de trabalho cooperativo mas, também, colaborativo e de verdadeira partilha (Holmes et al., 2001; Cabrita, 2005).

O uso do iTALC numa sala TIC parece ajudar a construir este clima. Não se trata de implementar um cenário que torne o professor omnisciente de tudo o que ocorre à sua volta mas, sim, utilizar uma ferramenta que promova a partilha e a colaboração entre os diferentes atores, simultaneamente, capaz de permitir ao professor um controlo adequado de uma sala cheia de computadores ligados "ao admirável mundo novo" da Internet, ou seja, de um laboratório TIC na verdadeira aceção do termo. Todos os *alunos-caso* estudados foram unânimes quando declararam, no Questionário Final, que este software foi de grande ajuda para o desenrolar das tarefas e que facilitou o processo de ensinar e de aprender. Também referiram, em resposta ao mesmo questionário, que discordavam que a aplicação servisse apenas para controlar os alunos.

Sobre o impacto da abordagem do tópico das transformações geométricas isométricas com recurso ao GeoGebra num ambiente controlado pelo iTALC no desenvolvimento da criatividade, é importante referir, desde já, que o clima de sala de aula que foi criado apresentava, realmente, muitas das características acima descritas. Os alunos partilhavam ativamente os seus conhecimentos e descobertas, quer com o colega de grupo, quer com os restantes colegas da turma. Ocorriam, frequentemente, momentos de confrontação e discussão mediados pelo professor. Esses momentos pareciam despoletar o aparecimento de novas motivações nos alunos e, consequentemente, novas estratégias, abordagens e produções.

Ainda segundo Fleith e Alencar (2005), tal ambiente deve reconhecer e valorizar as ideias criativas. Como se viu no capítulo anterior, os alunos que integravam os casos apreciavam quer as contribuições intelectualmente honestas dos colegas quer o apreço público pelos seus trabalhos. Apreciavam ainda, e de sobremaneira, tanto as opiniões do professor como o seu interesse em "guardar" aqueles trabalhos mais criativos, conforme se infere das respostas destes alunos à quinta questão do Questionário Final, com a qual se pretendia saber se os professores valorizavam os trabalhos dos alunos. É interessante constatar a importância que conferiram a este aspecto.

Os cinco alunos salientaram, também que a observação de trabalhos de outros alunos (na generalidade pautados por uma grande criatividade) os motivou a apresentarem outros mais criativos, embora a Catarina tenha referido no Questionário Final que, apesar de ter sentido essa necessidade, não conseguiu ser mais criativa. Esta declaração, como se poderá constatar através da análise do capítulo anterior, contrasta com todo o trabalho da aluna, pautado por grande originalidade dos produtos, pelo número de estratégias desenvolvidas e pela forma como adaptava os processos selecionados para criar múltiplas abordagens. Isto é visível, sobretudo, nas respostas à quarta questão da tarefa I (anexo 06) e à terceira questão da tarefa III (anexo 08), onde, depois de observar trabalhos de outros alunos, readaptou os processos de modo a produzir um produto menos "convencional". Também os pares Tiago e Luísa e Francisca e Gabriela, nas respostas às mesmas questões, reagiram da mesma forma, predispondo-se para reavaliarem as suas abordagens no sentido de apresentarem trabalhos bastante diferentes dos da maioria dos seus colegas da turma. Nestes dois últimos casos e em contraponto com o caso Catarina, as sugestões dos colegas eram tidas seriamente em conta, o que os levava a incorporarem, muitas vezes, elementos novos que estavam ausentes nas suas ideias originais. Daqui, surgiam "construções" progressivamente mais originais que, ao serem mostradas a todos, praticamente em tempo real, desencadeavam, por sua vez, novas abordagens por parte dos alunos. Parece, também, confirmar-se a ideia formulada por Levenson (2011) de que a criatividade pode ser construída coletivamente contribuindo, simultaneamente, para que esta se desenvolva a nível individual. A possibilidade de se partilhar, a qualquer momento, qualquer abordagem, processo ou solução que ocorresse num computador era facultada pelo iTALC. As dinâmicas subjacentes a esta "atuação coletiva" num meio tecnológico carecem da "atmosfera" adequada e de ferramentas que as promovam. Os CMS's podem desempenhar esse papel, tal como referem Joyce e Schmidl (2008).

De acordo com as respostas ao Questionário Inicial, as representações de criatividade dos alunos estavam ligadas, principalmente, à ideia de criação de algo novo, que fosse diferente do normal e original. Esta conceção converge com o que descrevem vários autores (Sternberg & Lubart, 1999; Alencar & Fleith, 2003a; Fleith & Alencar, 2005). Associavam-na a atividades ligadas às artes e à escrita. É deveras interessante constatar que apenas a Gabriela se referiu à Musica como área criativa, apesar de todos frequentarem o conservatório. Os cinco alunos admitiram ser possível ser-se criativo a Matemática. Este facto confirma, de alguma maneira, o que dizem Barbeau e Taylor (2005) sobre a natureza criativa da disciplina de Matemática. Esta perceção mantinha-se no fim do estudo mas com algumas particularidades. No Questionário Final, a Gabriela, o Tiago e a Luísa declararam não imaginar que fosse possível produzir trabalhos criativos a Matemática, o que contradiz, de alguma forma, a sua posição inicial e, também, a forma como estes alunos desenvolveram os seus trabalhos ao longo das diferentes tarefas. Tal facto sugere um erro de interpretação da pergunta do questionário ou um entendimento relacionado com o nível de criatividade exibidos nos trabalhos pois todos eles se declararam, no início do estudo, alunos criativos, acrescentando ainda que ser criativo não era difícil.

A possibilidade de avaliar a criatividade dos alunos, curiosamente, reuniu o consenso de todos, apesar de esta ser uma questão verdadeiramente complexa e difícil. A natureza difusa do conceito (Mann, 2005), com as suas características intrínsecas, levou vários autores a proporem diferentes formas e instrumentos para efetivar a sua avaliação. Este estudo centrou-se na observação, ainda que de forma informal, de dimensões de criatividade propostas por Conway (1999): a fluência, a flexibilidade e a originalidade das respostas dos alunos às diferentes questões. Destas, deu-se especial atenção à terceira, cuja medição é mais plausível num contexto mais informal e menos sistematizado como é o decorrer de uma aula onde o investigador é simultaneamente o professor. As respostas dos três casos selecionados às questões analisadas na secção relativa à criatividade, no capítulo anterior, por contraste com boa parte dos grupos constituídos, revelam traços únicos e distintivos que lhes conferem uma grande originalidade.

Verificou-se, também, que os Grupos 2 e 3 tendiam a apresentar um maior número de respostas e que estas eram mais elaboradas e originais quando recorriam ao GeoGebra para resolver as tarefas. Por oposição, o recurso ao "papel e lápis" (e aqui inclui-se também a instrumentação tradicional) parecia "mergulhar" os alunos num turbilhão de procedimentos técnicos que, de alguma forma, parecia impedi-los de explorar estratégias alternativas, limitando também a sua capacidade de adaptar processos, com consequências evidentes na originalidade das suas produções.

Este facto, muito vincado no grupo 2 e também percetível no grupo 3, parecia não ser determinante para o caso Catarina (G1). Esta aluna recorria frequentemente e de forma prévia ao "papel e lápis" para ensaiar os procedimentos de resolução das tarefas. No entanto, a qualidade, em termos de criatividade, apresentada pelas produções da aluna no GeoGebra não poderia ser alcançada numa resolução tradicional. Em termos de fluência, para os três casos estudados, pode-se observar, em várias tarefas da sequência didática (tarefas I.4; III.3; iV.3; V.3 e VI.4), que os grupos elaboraram várias abordagens, com recurso a diferentes procedimentos na construção de diferentes soluções para o mesmo problema que, numa provável manifestação de flexibilidade, conjugavam e adaptavam para conseguir os "efeitos" pretendidos. Assim, parece verificar-se uma melhoria nas três dimensões da criatividade consideradas: fluência, flexibilidade e originalidade. O software libertava, efetivamente, os alunos da pesada "mecânica" procedimental com reflexos positivos na criatividade dos seus trabalhos. Mas o trabalho verdadeiramente criativo parecia emergir de um conhecimento sólido dos conceitos, nomeadamente, inerentes às isometrias e à simetria (Sheffield, 2009). Ribeiro (2005) sugere uma libertação para um trabalho mais profícuo em Geometria. Concorda-se, apenas em parte, pelos motivos que a seguir se expõem.

Relativamente ao impacto da abordagem do tópico das transformações com recurso ao GeoGebra num ambiente controlado pelo iTALC no desenvolvimento de uma mais sólida apropriação de conceitos geométricos envolvidos e sua aplicação, da análise do capítulo anterior é possível verificar-se que os alunos que constituíram os três casos em análise revelaram, no início do estudo empírico, um conhecimento muito superficial (ou mesmo nulo), frequentemente com erros conceptuais sobre as isometrias e a simetria. No pré-teste, o Tiago e a Francisca não acertaram qualquer questão. A Gabriela conseguiu resolver parte da questão número oito (construção livre) e a Luísa respondeu com alguma correcção às duas primeiras alíneas da questão número cinco sobre a reflexão e a translação. A Catarina ensaiou uma resposta, com algum grau de acerto, à primeira (reflexão), quinta (reflexão) e sexta questões (composição de isometrias) do teste, revelando algumas noções, mais ou menos intuitivas, do conceito de isometria.

Da análise das respostas dos alunos ao Questionário Final, constata-se um alto grau de concordância por parte de todos os alunos sobre os benefícios da utilização do GeoGebra. Sem exceção, os cinco alunos declararam concordar ou concordar fortemente que o software foi de fácil familiarização e que era: interessante; facilitador do trabalho com as transformações geométricas; promotor da autonomia dos alunos; facilitador do trabalho de grupo (ou em pares) e promotor da interação entre os alunos. Não foi apontado qualquer aspecto negativo. Também no mesmo questionário, relativamente à forma como o tópico tinha sido implementado, alguns alunos, como já se viu, referiram que o programa os ajudou a perceber as isometrias, tornando a Geometria menos complexa e mais divertida.

Parece claro que, de facto, e pelos resultados que os alunos alcançaram no final do estudo, a utilização deste software é uma mais-valia, constituindo-se como uma ferramenta poderosa na resolução gráfica de problemas que permite aos alunos múltiplas abordagens e alcançar um maior número de soluções (Bardini, Pierce & Stacey, 2004).

Foi também possível constatar que a produtividade, nas aulas, ia aumentando desde que não existissem constrangimentos técnicos ou erros de estruturação das questões (Ferreira, 2010). De facto, o risco de se proporem tarefas que requeiram competências tecnológicas elevadas que impeçam os alunos de se focarem na vertente concetual deve ser previsto e este aspecto deve ser tido muito em conta na planificação das sequências didáticas, tal como sugere Berger (2005).

A utilização do ADGD parecia assumir um papel importante, especialmente em relação aos alunos que apresentavam mais dificuldades na resolução das tarefas. Observou-se, também, que o sucesso na resolução de uma tarefa no GeoGebra nem sempre assegurava um êxito similar quando a mesma era realizada em ambiente de "papel e lápis". Este ponto era especialmente crítico para os alunos com mais dificuldades. Se a passagem do "papel" para o ADGD não constituía qualquer problema, o inverso não era verdade. Nomeadamente, o Tiago e a Luísa sentiram especiais dificuldades a fazer esta transição. Estas foram estendidas, em menor grau, ao grupo 3. A Catarina (G1), que normalmente utilizava um procedimento inverso, ou seja, ensaiava as resoluções no papel, demonstrando grande capacidade de visualização e raciocínio espacial, evoluindo posteriormente para o ADGD, não revelou qualquer dificuldade nestas transições. A aluna, como já se referiu anteriormente, parecia sentir necessidade de "meter as mãos na massa", sentir o lápis e a "proximidade" do papel",

Da análise das respostas dos alunos ao Questionário Final, constata-se que todos os alunos manifestaram concordância ou forte concordância quando inquiridos sobre se consideravam importante ter trabalhado com "papel e lápis" e ter utilizado instrumentos de medida e de desenho - régua, esquadro, compasso e transferidor.

Estas constatações sugerem a importância de uma abordagem de caráter complementar, tal como referem diversos autores (Laborde, 2001; Ponte, 2005; Ponte et al., 2007; Ponte, Branco & Matos, 2009).

Sendo o GeoGebra um micromundo informático, o seu uso numa turma de dimensões consideráveis numa sala TIC representa um desafio que exige, do professor, algum conhecimento técnico em lidar com determinadas ocorrências deste contexto e, sobretudo, uma grande capacidade de monitorização do que se passa à sua volta e em cada estação de trabalho. A utilização adequada de um CMS neste contexto proporciona ao professor a possibilidade de acompanhar, em tempo real, a progressão de todos os alunos nas tarefas, oferecendo-lhe a oportunidade de selecionar os aspectos mais relevantes do trabalho de cada aluno, projetá-lo e discuti-lo com toda a turma. Detetar bloqueios, quer técnicos, quer conceptuais, na progressão do trabalho e proporcionar apoio imediato, muitas vezes assumindo o controlo desse trabalho a partir do seu próprio computador, é, numa sala TIC, fundamental. Manter as crianças, sobretudo as de idade menos avançada, focadas nas tarefas poderá resultar em ganhos significativos, tanto no domínio disciplinar como em relação às atitudes face à Matemática.

Em relação ao impacto da abordagem do tópico com recurso ao GeoGebra mediado pelo iTALC no desenvolvimento de uma atitude mais favorável em relação à Matemática, verificou-se uma evolução positiva nos três casos analisados.

No Questionário Inicial, os alunos referiram a importância que atribuíam à Matemática, conscientes do papel que esta assume nas suas perspectivas para o futuro. No entanto, o Tiago declarou que não gostava da disciplina e a Gabriela e a Catarina referiram que, apesar de gostarem de Matemática, não gostavam de Geometria. Se se atender às justificações (ver capítulo anterior), constata-se que a complexidade, quer intrínseca, quer percebida da disciplina (González-Pienda et al., 2002; Koehler & Grouws, 1992; Núñez et al., 2005) e, provavelmente, as abordagens tradicionais e rotineiras parecem ter contribuído decisivamente para este sentimento.

Todos os alunos que constituíram os casos declararam, no Questionário Final, que a abordagem tinha contribuído para uma visão mais positiva da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular, e referiram também que se divertiam quando resolviam as tarefas. Alguns alunos declararam ainda que, nomeadamente o GeoGebra, lhes permitia “criar” e possibilitava um melhor entendimento dos conceitos envolvidos. Saraiva (1991) refere-se à relação entre a utilização do computador e o aparecimento de uma forma diferente de encarar a Matemática. Note-se que todos os *alunos-caso* manifestaram discordar que a abordagem tenha contribuído para tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora. Observou-se exactamente o contrário. A sua atitude era de grande interesse e empenho nas tarefas propostas. Note-se, como se viu no capítulo anterior, que o Tiago e a Luísa solicitaram poder comparecer voluntariamente às aulas de apoio pedagógico que eram dinamizadas pelo mesmo professor.

Ainda segundo o último investigador referido, os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável e de maior interesse porque acham que a matemática se torna mais clara, entusiasmante e mais engraçada deixando de ser intransponível (idem). Esta ideia parece confirmar-se pelas respostas também ao Questionário Final, onde os alunos declararam precisamente isso (ver quadro 30 no capítulo anterior)

Sobre este aspecto, e também como se viu no capítulo anterior, os alunos declararam que o seu interesse pela disciplina tinha aumentado e que a forma como o tópico tinha sido implementado tinha contribuído para diminuir os seus receios face à Matemática.

2. Limitações e Constrangimentos

Sobre as limitações e os constrangimentos que se enfrentaram, enumeram-se, apenas, aqueles que, na qualidade de investigador e de forma objetiva, poderiam influenciar decisivamente o desenvolvimento deste estudo. Importa também perceber as reais condições em que ocorreu, assim como as suas susceptibilidades ou vulnerabilidades.

O primeiro constrangimento reporta-se à inexperiência do próprio investigador. O duplo papel de professor e de investigador não é fácil de assumir. Desorientar-se nesta dicotomia revela-se relativamente fácil e com eventuais prejuízos, quer para os alunos quer para a investigação. Certamente, foram perdidas oportunidades. Situações que, ao longo todo este trajeto, careciam de maior atenção e análise foram, provavelmente, olvidadas ou, devido à falta de sensibilidade, nem sequer percebidas da melhor forma.

Este estudo foi implementado numa turma com vinte e seis alunos do sexto ano de escolaridade do Ensino Básico. A turma, de grandes dimensões e de caráter muito heterogéneo, era, por si só, um desafio. A organização, ao nível logístico, para um grupo desta dimensão é bastante complexa. Os laboratórios TIC da escola não estavam preparados para lidar, em termos de infraestrutura de rede, ou ao nível da organização dos espaços e dos horários, com uma utilização tão intensiva. Se pertencer à equipa PTE foi fundamental para ultrapassar os problemas técnicos, só a boa vontade dos colegas permitiu os ajustes necessários nos horários para que tudo decorresse de forma fluida e eficaz.

A ausência de apoio educativo individualizado ou coadjuvação por parte de outro professor, não sendo um constrangimento, foi uma limitação. Promover um ensino altamente tecnológico num ambiente estruturalmente débil, em termos do software instalado nas estações de trabalho, por vezes desatualizado ou mesmo obsoleto, e da qualidade da LAN da instalada no laboratório, pode ser um exercício temerário. Qualquer disfunção técnica pode revelar-se desastrosa para o desenrolar dos trabalhos. A presença de outro professor na sala, ou de um responsável técnico, eliminaria muitos constrangimentos. Diversas notas sobre aspectos significativos para a investigação não foram tomadas e outras não foram transpostas para o Diário de Bordo da forma mais adequada, devido a estes fatores.

A duração do estudo foi fortemente limitada por aspectos relacionados com a preparação dos alunos para os exames nacionais do sexto ano. Assim, por obrigações que se relacionavam com a programação curricular, decidida pelo departamento, a implementação deste estudo esteve limitada a dez sessões no início do terceiro período, o que é manifestamente pouco para a realização de um estudo com estas características.

O facto da escola, à data da realização desta investigação, se encontrar em obras originava, frequentemente, a ocorrência de cortes no fluxo de energia elétrica, assim como inúmeros problemas na LAN do edifício, com interrupções sucessivas do acesso à Internet. Este constrangimento revelou-se, em alguns momentos, bastante importante.

À data da realização desta investigação, escasseiam em Portugal (se é que existem) estudos sobre a utilização de Sistemas de Gestão de Atividades de Sala de Aula (CMS em inglês) em contexto escolar. Curiosamente, apesar de ser uma ferramenta disponível há já algum tempo, a sua utilização parece relegada para o meio empresarial. Escasseiam, também, estudos no âmbito do desenvolvimento da criatividade, que parece agora assumir uma importância acrescida no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Não sendo este facto propriamente um constrangimento, não deixou de colocar algumas dificuldades no desenrolar da investigação.

3. Considerações Finais

A investigação desenvolvida parece sugerir que a utilização adequada de Sistemas de Gestão de Atividades de Sala de Aula (CMS) em abordagens tecnológicas, centradas no uso de computadores, parece contribuir de forma positiva para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Estas aplicações permitem, por um lado, melhorar a gestão disciplinar, mantendo os alunos mais focados nas tarefas e, por outro, contribuir decisivamente para a construção de um ambiente de aprendizagem onde a cooperação, colaboração e partilha entre todos os atores na sala de aula seja realmente possível.

Estudos mais aprofundados e alargados no tempo devem, ainda, ser realizados para se poder compreender melhor os benefícios da sua utilização. Variações na idade dos alunos, nos tópicos ou nos temas a abordar devem ser introduzidas. Conhecer as suas potencialidades no ensino à distância (quando o estudante não possa comparecer à escola) constituem, ainda, um campo por explorar. Perceber os contextos onde o seu emprego possa ser decremental, é outro.

Deste estudo resulta, também, a perceção que a criação dessa "atmosfera social " parece suscitar incrementos nas dimensões da criatividade. No entanto, as limitações deste estudo, relativas, sobretudo, ao seu curto período empírico e à natureza extraordinariamente complexa e fluida do fenómeno, não permitem estabelecer conclusões mais ambiciosas.

Também no que diz respeito à criatividade, a utilização dos ambientes dinâmicos de Geometria, nomeadamente o GeoGebra, parece facilitar o aparecimento de produções mais criativas em Geometria. O software, ao libertar os alunos dos processos mais instrumentais e/ou formais, permite uma "manipulação" mais fluida e flexível dos objetos geométricos, possibilitando ao aluno a exploração de mais processos e resoluções, com incrementos visíveis nas criatividade dos produtos. Sobre este aspecto e pelos motivos acima referidos, são necessários mais estudos, quer em extensão, quer em profundidade.

Se a utilização do ADGD aparenta ter, no trabalho em Geometria, uma grande influência em algumas dimensões da criatividade, o desenvolvimento de conhecimentos e capacidades geométricos parece beneficiar mais de uma abordagem complementar, que conjugue os ambientes dinâmicos de geometria com os ambientes de "papel e lápis". Apesar do valor, amplamente reconhecido, da utilização deste tipo de software, nomeadamente, no estudo das transformações geométricas, alguns alunos aparentam experimentar dificuldades nas transições do ADGD para o "papel e lápis". Estes constrangimentos não se limitam às dificuldades no uso de instrumentação diversa - compassos, transferidores, réguas, etc. - mas aparecem, também, relacionados com aspectos mais formais intrínsecos aos conceitos.

Deste estudo resulta, também, a perceção de que abordagens diferentes, com caráter mais tecnológico e exploratório, parecem promover atitudes mais favoráveis em relação à Matemática, em geral, e à Geometria em particular. Este facto indicia um efeito benéfico para os alunos, quer ao nível da apropriação de conhecimentos quer no desenvolvimento de capacidades como, por exemplo, a criatividade. Outros fatores, de identificação mais difícil, devem ser tidos em conta noutros estudos, de forma a se estabelecerem conclusões mais definitivas.

Alguns destes aspectos devem ser, como foi sugerido, alvo de estudos bastante mais extensos e aprofundados. A importância que assumem nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática deverá ter implicações quer na formação inicial dos professores quer sua na formação contínua.

BIBLIOGRAFIA

A

Abrantes, P. (2005). *A reorganização curricular do ensino básico: princípios, medidas e Implicações.* Lisboa: ME-DEB.

Abrantes, P.; Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME.

Adams, D. & Hamm, M. (2010). *Demystify math, science, and technology: creativity, innovation, and problem-solving*. Rowman & Littlefield Education

Adams, K. (2006). *The sources of innovation and creativity*. A paper commissioned by the National Center on Education and the Economy for the New Commission on the Skills of the American Workforce, National Center on Education and the Economy.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.fpspi.org/pdf/innovcreativity.pdf

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação. Um guia prático e crítico.* Porto: Asa Editores.

Alencar, E. S (1990). *Como desenvolver o potencial criador: um guia para a liberação da criatividade em sala de aula.* Petrópolis, RJ: Vozes, 1990.

Alencar, E. S. (1996a). A gerência da criatividade. São Paulo: Makron. In Becker, M. A. D`Ávila, A. Roazzi, M. Madeira, I. Arend, D. Schneider, L. Wainberg, & B. de Souza (2001*), Estudo exploratório da conceitualização da criatividade em estudantes universitários. Psicologia: Reflexão e Crítica,* 14 (3), pp. 571-579. Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-79722001000300012&script=sci_arttext

Alencar, E. S. (1996b). A educação para a Criatividade. In *Congresso Internacional de Sobredotação – Problemática Sócio-Educativa*. Maia: Instituto Superior da Maia.

Alencar, E. S. (2007). Criatividade no contexto educacional: três décadas de pesquisa. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 23 (n. especial), 45-49.

Alencar, E. S. & Fleith, D. (2003a). *Criatividade: múltiplas perspectivas.* Brasília, DF: Editora da Universidade de Brasília.

Alencar, E. S. & Fleith, D. (2003b). Contribuições teóricas recentes ao estudo da criatividade. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 19(1), 1-8.

Alencar, E. S. & Fleith, D. (2008). Barreiras à promoção da criatividade no ensino fundamental. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 24(1), 59-66.

Amabile, T. (1995). Attributions of creativity: What are the consequences? *Creativity Research Journal*, 8, 423-426.

Amabile, T. (1996). *Creativity in context*. Boulder, Colorado: Westview Press.

André, M. (2005). Estudos de caso revelam efeitos sócio-pedagógicos de um programa de formação de professores. In *Revista Lusófona de Educação*, 6, 93-115.

Andresen, M. & Misfeldt, M. (2009). Essentials of teacher training sessions with GeoGebra. In *International Journal for Technology in Mathematics Education* (Vol. 16, N.1, pp.37- 43).

Antunes, C. (2003). *A criatividade na sala de aula.* Editora Vozes. São Paulo.

APM (1998). *Matemática 2001, diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática.* (Edição comemorativa). Lisboa: APM.

Arends, R. (1995). *Aprender a Ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill.

Arendt, R. (2003). Construtivismo ou construcionismo. *Estudos de Psicologia*. Natal, 2003. Vol. 8, Art. 1.

Azevedo, I.; Morais, M. F. & Braga, A. (2008). *Criatividade em alunos do ensino básico: que confronto com a percepção dos seus professores?.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/19379

B

Barbeau, E. & Taylor, P. (2005). Challenging mathematics in and beyond the classroom. *Discussion document of the ICMI Study 16.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.amt.edu.au/icmis16.html

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico.* (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Bardini, C.; Pierce, R. & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphics calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2, 353-376.

Bastos, R. (2006). Notas para o Ensino da Geometria – Simetria. *Educação e Matemática*, 88, 9–11.

Bastos, R. (2007). Notas sobre o Ensino da Geometria-Transformações Geométricas*. Educação e Matemática,* 94, 23–27.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, Cap. 19, pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. & Clements, D. (1992). Geometry and spacial reasoning. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the NCTM*, 420-464. New York: Macmillan Publishing Company.

Bell, D. (2006). *El advenimiento de la sociedad post-industrial: un intento de prognosis social*. (6ª ed.). Madrid: Alianza Editorial, 2006.

Bellemain, F. (1992). *Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre.* (Tese de Doutoramento). Grenoble: Universite Joseph-Fourier.

Bellingeri, P.; Dedo, M.; Sieno, S. & Turrini, C. (2003). *O ritmo das formas*. Associação Atractor.

Berger, M. (2012). One computer-based mathematical task, different activities. In Tso, T.Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 59-66. Taipei, Taiwan: PME.

Berliner, D. C. & Calfee, R. C. (Eds.) (1996). *The handbook of educational psychology.* New York: Macmillan.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borges, C. (1994). A *linguagem Logo no ensino/aprendizagem de conceitos geométricos no 7º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Borralho, (2001). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial.* (Tese de Doutoramento). Évora: Universidade de Évora.

Borralho, A. 2003. A Didáctica da Matemática na Formação Inicial de Professores. In A. Neto; J. Nico; J. Chouriço; P. Costa & P. Mendes (Eds), *Didácticas e Metodologias de Educação: Percursos e Desafios*, 11311-1138. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.

Breda, A. (2006). *Transformações do Plano - Seminário de Aprofundamento*. (Documento policopiado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Breda, A.; Serrazina, L.; Menezes, L.; Sousa, L. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Brophy, J. & Good, T. (1986). Teacher behaviour and student. In M. Wittrock (ed). *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan.

Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

C

Cabrita, I. (2005). 'Imagens de Interculturalidade' na recriação de um ambiente comunal de aprendizagem. In *Associação Nacional de Professores (Secção de Castelo Branco), A escola que aprende: Tecnologias, Informação e Conhecimento, Actas das XIII Jornadas Pedagógicas e VIII Transfronteiriças*. Castelo Branco: RVJ Editores (p.83-108).

Cabrita, I.; Pinheiro, L.; Pinheiro, J. & Sousa, O. (2008). *Novas trajectórias em Matemática.* Aveiro: Universidade de Aveiro. Comissão Editorial. 978-972-273-0.

Cabrita, I.; Coelho, A, Vieira, C.; Malta, E.; Vizinho, I.; Almeida, J.; Gaspar, J.; Pinheiro, J.; Pinheiro, L.; Nunes, M.; Sousa, O. & Amaral, P. (2009). *Perspectivas e vivências emergentes em Matemática.* Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro. ISBN 978-972-789-293-8

Cabrita, I.; Coelho, A.; Vieira, C.; Malta, E.; Vizinho, I.; Almeida, J.; Gaspar, J.; Pinheiro, J.; Nunes, M.; Sousa, O. & Amaral, P. (2010). *Experiências de aprendizagem Matemática significantes.* Aveiro: Universidade de Aveiro. Comissão Editorial. ISBN 978-972-789-321-8.

Cabrita, I.; Coelho, A.; Vieira, C.; Malta, E.; Vizinho, I.; Almeida, J.; Gaspar, J.; Pinheiro, J.; Nunes, M.; Sousa, O. & Amaral, P. (2011*). Novos desafios de uma Matemática criativa.* Aveiro: Universidade de Aveiro. Comissão Editorial. ISBN 978-972-789-344-7.

Caldeira, M. J. (2006). *Desenvolvimento da criatividade em contexto escolar. Contributo para o estudo da formação contínua de professores na área da criatividade*. Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências.

Canavarro, A. (2011). *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios*. Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://www.rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf

Candeias, A. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica (8º ano).* (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências.

Caputi, A. & Gerônimo, J. (s/d). *Descobrindo as simetrias no plano.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/caputi.roberto.pdf

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Chagas, J. F.; Aspesi, C. C. & Fleith, D. S. (2005). A relação entre criatividade e desenvolvimento: Uma visão sistémica. In M. A. Dessen & A. Costa Jr. (Eds.), *A ciência do desenvolvimento: Tendências actuais e perspectivas futuras* (pp. 210-228). Porto Alegre: Artmed.

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick; W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp.151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan Publishing Company.

Clements, D. H.; Battista, M. T.; Sarama, J. & Swaminhatan, S. (1996). Development of turn and turn measurement concepts in a computer-based instructional unit. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 313-337.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482–487.

Clements, D. H., Sarama, J., & Wilson, D. C. (2001). Composition of geometric figures. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.*), Proceedings of the 25th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 273-280). Utrecht, Holanda: PME.

Coelho, M. (1995). O *Cabri-Géomètre na resolução de problemas – estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimento por alunos do 6º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4, 8, 510-514.

Costa, F. (2007). Tecnologias Educativas. Análise das dissertações de mestrado realizadas em Portugal. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação*, 3, pp.7-24.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://sisifo.fpce.ul.pt

Costa, G. (2004). *O professor de Matemática e as tecnologias de informação e comunicação: abrindo caminho para uma nova cultura profissional. (*Tese de Doutoramento). Campinas: Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação.

Costa, G. L. M. & Fiorentini, D. (2007). Mudança da cultura docente em um contexto de trabalho colaborativo de introdução das tecnologias de informação e comunicação na prática escolar. *Bolema*, 20 (27), 1-21.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Edições Almedina.

Coutinho, C. & Chaves, J. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *In Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221-244.

Coutinho, C.; Sousa, A.; Dias, A.; Bessa, F.; Ferreira, M. & Vieira, S. (2009). Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Psicologia, Educação e Cultura*, Vol. XIII, Nº 2, 455-479.

Craft, A. (2001). Little c creativity, in: A. Craft, B. Jeffrey & M. Leibling (Eds). *Creativity in education* (London, Continuum) 45–61.

Creswell, J. (1994). *Research design: qualitative and quantitative approaches*. Tousand Oaks: Sage Publications.

Cropley, A. (2003). *Creativity in education and learning: A guide for teachers and educators.* London. Kogan Page.

D

De Bono, E. (2003). *Ensine os seus filhos a pensar*. Lisboa: Difusão Cultural.

De Bono, E. (2005). *O pensamento Lateral*. Cascais: Editora Pergaminho.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.

Denzin, N., Lincoln, Y. (2000). The discipline and practice of qualitative research. In Denzin & Lincoln (eds.), *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks; Sage Publications, 1-28.

Dooley, L. (2002). Case Study Research and Theory Building. *Advances in Developing Human Resources*, 4, 335-354.

Duarte, J. (2008). Estudos de caso em educação. Investigação em profundidade com recursos reduzidos e outro modo de generalização. In *Revista Lusófona de Educação*, 11, 113-132.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

E

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. Education Studies in Mathematics, Netherlands, v. 34, p.183-217.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp.42-53). Dordrecht: Kluwer.

F

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. Artigo publicado: *Noesis* (18), 64-66.

Ferreira, R. C. (2010). Ensinando Matemática com o GeoGebra. in *Enciclopédia biosfera, Centro Científico Conhecer - Goiânia*, vol. 6, n.10, p.106.

Fino, C. (1998). *Um software educativo que suporte uma construção de conhecimento em interacção (com pares e professor).* Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.minerva.uevora.pt/simposio/comunicacoes/Carlos_Fino.html

Fleith, D. & Alencar, E. (2005). Escala sobre o clima para criatividade em sala de aula. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 21(1), 85-91.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Fonseca, L. (2009). Comunicação Matemática na sala de aula. *Educação e Matemática*, 103, 2-6.

Franco de Oliveira, A. J. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

G

Galluch, P. & Thatcher, J. (2011). Maladaptive vs. Faithful Use of Internet Applications in the Classroom: An Empirical Examination. *Journal of Information Technology Theory and Application (JITTA)*: V. 12, Iss. 1, Art. 2.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://aisel.aisnet.org/jitta/vol12/iss1/2

GAVE-ME (2007). *PISA 2006 – Competências Cientificas dos Alunos Portugueses*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional /Ministério da Educação.

GAVE-ME (2010). PISA *2009 – Competências dos Alunos Portugueses.* Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional /Ministério da Educação.

Godoy, A. S. (1995), Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades, In *Revista de Administração de Empresas,* v.35, n.2, Mar./Abr., p. 57-63.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. In *Actas do SIEM*, 233-243. Lisboa: APM.

Gomez, G.; Flores, J. & Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Gontijo, C. H. (2007). *Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do ensino médio*. (Tese de Doutoramento). Brasília: Universidade de Brasília.

González-Pienda, J. A.; Núñez, J. C.; Alvarez, L.; González, P.; González-Pumariega, S.; Roces, C. & Soler, E. (2002a). Fracaso en el aprendizaje de las Matemáticas: análisis de las causas. *VII Congreso Internacional: Exigencias de la Diversidad*. Santiago de Compostela.

Gorgulho, I. (2005). *Actividades de Carácter Investigativo em Ambientes de Geometria Dinâmica: Um estudo com alunos de 6º e 7º anos.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências.

Gravina, M. A. & Santarosa, L. M. (1998). A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. *IV Congresso RIBIE*. Brasília.

Guimarães, H. (2003). Pontos críticos no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas dicotomias. In *Educação Matemática*, p.3-6. (75). Lisboa: APM.

Guimarães, L.; Belfort, E. & Bellemain, F. (2002). *Geometry: back to the future?*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap384.pdf

Gutiérrez, A.; Jaime, A. & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.

Guzdial, M. (1997a). *Constructivism vs constructionism.*
Acedido a 20 de outubro de 2012 em: http://www.cc.gatech.edu/edutech/LBD/constructivism.html

Guzdial, M. (1997b). *Information Ecology of Collaborations in Educational Settings: Influence of Tool*. Proccedings of Computer Support for Collaborative Learning 97.
Acedido a 20 de outubro de 2012 em: http://gerrystahl.net/proceedings/cscl1997/papers/guzdial.pdf

Guzmán, M. (2003). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.* Acedido a 20 de outubro em: http://www.oei.es/oeivirt/edumat.htm

H

Hamel, J. (1997). *Étude de cas et sciences sociales.* Paris: L'Harmattan.

Hargreaves, A. (2004). *O ensino na sociedade do conhecimento: educação na era da insegurança*. Porto Alegre: Artmed, 2004.

Harper, K. A. (2010). Demystify Math, Science, and Technology: Creativity, Innovation, and Problem-Solving. [Book Review]. *Teaching Children Mathematics, 17*(4), 260-260.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics, Netherlands,* v. 18, p.59-74.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R.; Parzysz, B. & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp.161-204). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 1-23. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hocevar, D. & Bachelor, P. (1989). A taxonomy and critique of measurements used in the study of creativity. In J. Glover, R. Ronning & C. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (p.53-75). New York: Plenum Press.

Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. In D. Küchemann (Ed.), *Procedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.

Hohenwarter, M. & Hohenwarter J. (2009). *Ajuda GeoGebra - Manual Oficial da Versão 3.2.*. Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf

Holmes, N. (1999). The myth of the educational computer. *IEEE Computer*, 32(8):36-42.

Holmes, B.; Tangney, B.; FitzGibbon, A.; Savage, T. & Mehan, S. (2001). *Communal constructivism: students constructing learning for as well as with others.* Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.cs.tcd.ie/publications/tech-reports/reports.01/TCD-CS-2001-04.pdf

J

Jacobson, C. & Lehrer, R. (2000). Teacher appropriation and student learning of geometry through design. Journal for Research in Mathematics Education, 31(1), 71-88.

Jeffrey, B. & Craft, A. (2004). Teaching creatively and teaching for creativity: Distinctions and relationships. Educational Studies, 30, 77-87.

Jonassen, D.; Howland, J.; Marra, R. M. & Crismond, D. (2008). Meaningful Learning With Technology, Pearson Education, Boston (3rd edition).

Joyce, R. & Schmidl, H. (2008). The Big Brother And Better Early College Grades. *Proceedings of the Southern Association for Information Systems Conference*, Richmond, VA, USA March 13th-15th, 2008.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.cs.miami.edu/~harald/papers/sais2008.pdf

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9º ano de escolaridade.* (Dissertação de Mestrado). *Lisboa:* Universidade Nova de Lisboa. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas. Ciências da Educação.

Junqueira, M. & Valente, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas – materiais para a sala de aula*. Lisboa: APM.

K

Kafai, B. & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Koehler, M. & Grouws, D. A. (1992). Mathematics teaching and practices and their effects. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning*. New York: Macmillan, NCTM.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

Kuchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K. M. Hart (ed.*), Children´s Understanding of Mathematics* 11-16, 137-157. London: John Murray.

L

Laborde, C. (1993). Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-géomètre. In Jaworski, B. (Ed.), *Proceedings of the conference technology in mathematics teaching,* 93, 39-52. Birmingham: University of Birmingham.

Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer based environment. In L. Burton and B. Jaworski (Eds), *Technology in Mathematics Teaching – a Bridge Between Teaching and Learning* (pp. 35–68). London: Chartwell-Bratt.

Laborde, C. (2000). Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics. *Contribution to the T*, 3, 6-8. Citeseer.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabrigeometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6(3), 283–317.

Lehrer, R.; Jacobson, C.; Thoyre, G.; Kemeny, V.; Strom, D.; Horvath, J.; Gance, S. & Koehler, J. (1998). Developing understanding of Geometry and space in primary grades. In R. Lehrer, & D. Chazan, (Eds.), *Designing learning environments for developing of geometry and space* (Cap. 7, pp. 169-200). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Lehrer, R.; Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing of Geometry and space* (Cap. 6, pp. 137-167). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Leikin, R. (2009a). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R. (2009b). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In *the Proceedings of ICMI Study-19: Proofs and proving*.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_2.pdf

Leme da Silva, M. (1997). *Teorema de Tales: uma engenharia didática utilizando o Cabri-Géomètre.* (Dissertação de Mestrado). São Paulo: PUC-SP.

Lessard-Hébert, M.; Goyette, G. & Boutin, G. (2008). *Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Leung, S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 3, 81-85.

Leung, I. (2008). Psychological aspects of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of SmartBoard. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40, 1007-1021.

Levenson, E. (2011). Mathematical creativity in elementary school: is it individual or collective? *Proceedings of CERME 7*, Feb. 2011. University of Rzesków, Poland.

Lévy, P. (1990). *Les technologies de l'intelligence: l'avenir de la pensée à l'ère informatique*. Paris: Éditions La Découverte.

Lin, Y. S. (2011). Fostering creativity through education. *A conceptual framework of creative pedagogy.* 2(3), 149-155.

Lithner, J. (2006). *A framework for analyzing creative and imitative mathematical reasoning.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://snovit.math.umu.se/forskning/Didaktik/Rapportserien/060705B4D2.pdf

Livne, N. L.; Livne, O. E. & Milgram, R. M. (1999). Assessing academic and creative abilities in mathematics at four levels of understanding. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 30.

Lopes, I. (2010). *Uma abordagem curricular em Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico – um estudo de caso em Geometria.* (Tese de Doutoramento). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Lu, Y. (2008). *Linking Geometry and Algebra: A multiple-case study of Upper-Secondary mathematics teacher's conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan*. Master of Philosophy in Educational Research, University of Cambridge.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://www.geogebra.org/publications/2008-Lu-GeoGebra-England-Taiwan.pdf

Lüdke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU, 1986.

M

Magalhães, V. (2007). *Riscos e Rabiscos: para promover a criatividade, a leitura e a escrita.* (Tese de Mestrado). Braga: Universidade do Minho. Instituto de Estudos da Criança.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/8219

Mann, E. L. (2005). Mathematical creativity and school Mathematics: indicators of mathematical creativity in middle schools students. 2005. 120f. (Tese Doutoramento). University of Connecticut, Storrs, USA. Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://www.gifted.uconn.edu/siegle/Dissertations/Eric%20Mann.pdf

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

Mann, E. (2010). *The Creative Side of Mathematics: Beyond Rules, Rhymes, and 'Rithmetic.* Understanding Our Gifted. Winter 2010.

Martínez, A. (2006). Criatividade no trabalho pedagógico e criatividade na aprendizagem: uma relação necessária?. In Maria Carmen V. R. Tacca (Org.), *Aprendizagem e trabalho pedagógico* (pp. 69-94). Campinas: Alínea.

Martins, C. (2012*). Sistemas de equações: uma abordagem criativa*. (Dissertação de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Matos, J. F. (2005). *As Tecnologias de Informação e Comunicação e a Formação Inicial de Professores em Portugal: radiografia da situação em 2003.* Lisboa: GIASE-ME.

Matos, J. M. (1999). Cognitive models for the concept of angle. (Tese de Doutoramento). University of Georgia, Athens, Georgia, USA.

Matos, J. M. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. M. (2001). *Visualização, veículo para a educação em geometria.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_08_CCosta.pdf

Matos, L. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões - um estudo de caso com alunos do 9.º ano.* (Dissertação de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

ME (1990). *Programa do 1º Ciclo do Ensino Básico.* Imprensa Nacional Casa da Moeda. Ministério da Educação. Lisboa.

ME (1991a). *Organização Curricular e Programas: Ensino básico - 2º ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME (1991b). *Organização Curricular e Programas: Ensino básico 3º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

ME (1991c). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem – 2º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME (1991d). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem – 3º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME-DEB (2004). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico - 1.º Ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica. Lisboa (4.ª Edição).

ME-DGIDC (2009). *Metas de aprendizagem para o ensino básico.* Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Mehanovic, S. (2009). *Learning based on dynamic software geogebra.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=229084

Meirinhos, M. & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. In *EDUSER: Inovação, Investigação em Educação*, 2(2), 46-65. Instituto Politécnico de Bragança, Escola Superior de Educação.

Meissner, H. (2011). Challenges to further creativity in mathematics learning. In M. Avotina, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramana, L. Sheffield & E. Velikova (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students,* 1, 143-148.

Misfeldt, M. (2009). *Semiotic instruments: considering technology and representations as complementary.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://www.geogebra.org/publications/2008-Misfeldt-Cerme6.pdf

Miskulin, R. G. S. (2003). As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de Matemática. In D. Fiorentini, *Formação de Professores de Matemática*. Campinas–SP. Mercado de Letras.

Mitchelmore, M. (1992). Children's concept of perpendiculars. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 120-127). Durham, NH: PME.

Morais, M. F. (2001). *Definição e Avaliação da Criatividade: Uma Abordagem Cognitiva*. Centro de Estudos e Psicologia, Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho (Monografias em Educação). Braga, pp. 32-131.

Moderno, A. (1992). *A comunicação audiovisual no processo didáctico.* Aveiro: Universidade de Aveiro (edição de autor).

Morais, M. F. (2011). *Criatividade: desafios ao conceito.* Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/15332/1/congresso%20inova%c3%a7%c3%a3o2011.pdf

Morais, M. F. & Azevedo, I. (2008). Criatividade em contexto escolar: Representações de professores dos Ensinos Básico e Secundário. In M. Morais & S. Bahia (Eds.), *Criatividade e educação: Conceitos, necessidades e intervenção*. Braga: Psiquilíbrios.

Moran, J. M. (2004). A contribuição das tecnologias para uma educação inovadora. Contrapontos. *Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí*, vol 4, n,2, maio/ago, p. 347-356. Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.eca.usp.br/prof/moran/integracao.htm

Moran, J. M. (2004). Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias. *Revista Diálogo Educacional,* Vol. 4, N. 12, pp.13–21, Mai. Ago.

Morris, W. (2006). *Creativity – its place in education.* Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://jpb.com/creative/Creativity_in_Education.pdf

Moyer, J. (1978). The Relationship between the Mathematical Structure of Euclidean Transformations and the Spontaneously Developed Cognitive Structures of Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9: 2, 83-92.

N

NACCCE. (1999). *All our futures: Creativity, culture & education*. Sudbury, Suffolk: Department for Education and Employment.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendation for school mathematics of the 1980s*. Reston: National Council of teachers of Mathematics.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em inglês, publicado em 1991).

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://standards.nctm.org/document /chapter1/index.htm

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence*. Reston: NCTM.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.nctm.org/focalpoints

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. (2.ª edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Núñez, J. C.; González-Pienda, J. A.; Alvarez, L.; González-Castro, P.; González-Pumariega, S.; Roces,C.; Castejón, L.; Bernardo, A.; Solano, P.; García, D.; Da Silva, E. H.; Rosario, P. & Rodrigues, L. S. (2005). Las actitudes hacia las Matemáticas: perspectiva evolutiva. In *Actas do, VIII Congreso Galaico-Portugués de Psicopedagoxía* (pp.2389-2396). Braga.

O

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International* Conference (vol. 4, pp. 91-98). Valencia, Espanha: PME.

P

Paiva, R. (2011). Conteúdos didácticos multimédia, testes e exercícios de treino de Matemática online. *Atas do encontro da SPM Leiria 2010, Boletim especial da Sociedade Portuguesa de Matemática,* 119-123.

Palhares, P. (2004). Transformações Geométricas. In Pedro Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Papert, S. (1980). *Constructionism vs. Instructionism*. Disponível a 20 outubro de 2013 em: http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html

Papert, S. (1988). *LOGO: Computadores e Educação*. São Paulo: Editora Brasiliense.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer.* Disponível a 20 outubro de 2013 em:
https://creative-computing.appspot.com/assets/lib/Papert-1993.pdf

Papert, S. & Harel, I. (1991). *Situating Constructionism*. Ablex Publishing Corporation. Disponível a 20 de outubro de 2013 em:
http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Pardal, L. & Correia, E. (1995). *Métodos e técnicas de investigação social.* Porto: Areal Editores

Pardal, L. & Lopes, E. (2011). *Métodos e Técnicas de Investigação Social.* Porto: Areal Editores.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

Patrocínio, T. (2002). *Tecnologia, Educação e Cidadania.* Lisboa: IIE/ME.

Patton, M. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods.* SAGE Publications, Inc; Third Edition. London.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 29, 3, 63-67.

Penteado, M. G. (1999). Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão do Docente. In M. Bicudo, *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*, cap.17, p.297–313. São Paulo–SP, Editora UNESP.

Pereira, I. (2007). *A Criatividade em Manuais Escolares de Ciências do Ensino Básico.* (Tese de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Piaget, J. & Inhelder, B. (2004). *The child's conception of space.* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trad.) Cornwall: T. J. I. Digital. (Obra original publicada em 1948).

Piteira, G. (2000). *Actividade Matemática Emergente com os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, 2(2), 95-108.

Ponte, J. P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação Matemática*. Quadrante.

Ponte, J. P. (2000a). A investigação em didática da Matemática pode ser (mais) relevante? In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália.* Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2000b). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios?. *Revista Iberoamericana de Educação: Tic na educação.* Set. - Dez (24), 63-90

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 5-28. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3008

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação Matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J. P.; Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação* -DGIDC.

Ponte, J. P.; Quaresma, M. & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 1, 65-86.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2001). *Práticas profissionais dos professores de Matemática.* Grupo de Investigação DIF. Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *In O insucesso em Matemática: contributos da investigação, SEMINÁRIO*. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/2983

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, G. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010). O professor de Matemática do Ensino Básico. In GTI (Ed.) *Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: APM.

Porter, A. (1989). A curriculum out of balance: The case of elementary school mathematics. *Educational Researcher*, 18, 6-27.

R

Ribeiro, A. (1995). *Concepções de Professores do 1º Ciclo: A Matemática, o seu Ensino e os Materiais Didácticos*. (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Ribeiro, A. (1996). *Desenvolvimento Curricular*. Lisboa: Texto Editora.

Ribeiro, A. (2005). *O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura Matemática – um estudo no âmbito da formação inicial de professores do 1º CEB*. (Tese de Doutoramento). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Ribeiro, A. & Cabrita, I. (2002). O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura Matemática. In J. P. Ponte et al. (org.). *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores,* 135-157. Sociedade portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Robinson, K. (2011). *Out of Our Minds: Learning to be Creative*. UK: Capstone/Wiley.

Robinson, K. & Aronica, L. (2009). *The element: How finding your passion changes everything.* New York, NY: Penguin.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador.* (Dissertação de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Rodríguez, G. G.; Flores, J. G. & Jiménez, E. G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Roldão, M. (2005). *Formação e práticas de gestão curricular: crenças e equívocos.* Porto: Edições Asa.

Ruthven, K. (2008). The Interpretative Flexibility, Instrumental Evolution, and Institutional Adoption of Mathematical Software in Educational Practice: The Examples of Computer Algebra and Dynamic Geometry. *Journal of Educational Computing Research*, 2008. 39 (4), pp.379-394.

S

Sangiacomo, L. (1996). *O processo da mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica. Uma engenharia didática com o auxílio do Cabri-Géomètre*. (Dissertação de Mestrado). São Paulo: PUC-SP.

Saraiva, M. (1991). *O Computador na Aprendizagem da Geometria – Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Projecto Minerva/Polo DEFCUL – Universidade de Lisboa.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research*. NY: Routledge.

Schattschneider, D. (2009). Enumerating symmetry types of rectangle and frieze patterns: How Sherlock might have done it. In T. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world – Seventy-first yearbook* (pp. 17-32). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Schneider, E. (1999). La TI-92 dans l'enseignement des mathématiques, des enseignant(e)s découvrent la didactique des mathématiques. In D. Guin (Ed.), *Actes du congrès "Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*", Mai 1998 (pp.49–60). Montpellier: IREM.

Schultz, K. A., & Austin, J. D. (1983). Directional effects in transformational tasks. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14(2), 95-101.

Shah, S. A. (1969). Selected geometric concepts taught to children ages seven to eleven. *Arithmetic Teacher,* 16, 119-128.

Sheffield, L. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the education of gifted students* (pp.87-100). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Shriki, A. & Lavy, I. (2012). Teachers´ Perceptions of Mathematical Creativity and Its Nurture. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 35-42. Taipei, Taiwan: PME.

Serrazina, M. L. (1991). *Aprendizagem da Matemática: a importância da utilização de materiais. NOESIS*, 21, 37-39. Lisboa: IIE.

Silva, A. (2002). *Características dos alunos quando se envolvem com software dinâmico de Matemática The Geometer's Sketchpad.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Silva02.pdf

Silva, R. (2005). *Análise e avaliação do Cabri-Géomètre – um estudo no 9º ano de escolaridade no âmbito da Geometria*. (Dissertação de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática: Curso Complementar do Ensino Secundário*. 1.º Volume. Lisboa: GEP. Ministério da Educação e Investigação Científica. Disponível a 12 de dezembro de 2013 em: http://www.fc.ul.pt/pt/sebasti%C3%A3o-e-silva

Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática: Curso Complementar do Ensino Secundário*. 2.º e 3.º Volumes. Lisboa: GEP. Ministério da Educação e Investigação Ciêntífica. Disponível a 12 de dezembro de 2013 em: http://www.fc.ul.pt/pt/sebasti%C3%A3o-e-silva

Silver, E. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 3, 75-80.

Stake, R. E. (1994). Case Studies. In N. Denzin Y. Lincoln, *Handbook of qualitative research* (pp.236-247). Newsbury Park: Sage.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stake, R. (2007). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso* (A. Chaves, Trans.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. & Smith, M. (2009). Tarefas Matemáticas como quadro para reflexão. *Educação e Matemática,* 105, 22-28.

Stein, M. K.; Engle, R.; Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Sternberg, R. J. & Lubart, T. I. (1999). The concept of creativity: prospects and paradigms. In Sternberg, S. J. (Org.). *Handbook of creativity.* New York: Cambridge University, pp.3-15.

T

Tavares, D. (2012*). Padrões visuais, raciocínio funcional e criatividade*. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro.

Tempera, T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes*. (Dissertação de Mestrado). Instituto Politécnico de Lisboa. Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/113

Tierney, C.; Boyd, C. & Davis, G. (1990). Prospective primary teachers conceptions of area. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference* (vol. 2, pp. 307-314). México: PME.

Tobias, S. (2004). Fostering creativity in the science and mathematics classroom. In *Conference at National Science Foundation*. Malaysia.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking.* Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Torrance, E. P. (1988). The nature of creativity as manifest in its testing. In Robert J. Sternberg, *The nature of creativity: contemporary psychological perspectives* (pp.43-75). Cambridge: Cambridge University Press.

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMMS). (1995). Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://timss.bc.edu/timss1995i/effective_schools.html

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMMS). (2011). Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://timss.bc.edu/timss2011/international-results-mathematics.html

Trinity College, (2002). *Logic, programming, and robotics for non-technical students.*
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.cs.tcd.ie/crite/lpr/teaching/constructionism.html

Tuckman, B. (2005). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

V

Vale, I. (s/d). Criatividade: a essência da Matemática e da aula de Matemática. (Documento policopiado apresentado no *evento Matemática e criatividade no pré-escolar e no 1º CEB: práticas de referência*, realizado na Universidade de Aveiro, nos dias 29 e 30 de junho de 2012).

Vale, I. (2011). *Tarefas desafiantes e criativas.* Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/isabel.pdf

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, 8 (20), 181-207.
Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/493

Vale, I.; Pimentel, T.; Cabrita, I.; Barbosa, A. & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 171-178. Taipei, Taiwan: PME.

Valente, J. (2001). *A Informática na Educação: O computador auxiliando o processo de mudança na escola.* Disponível a 20 de outubro de 2013 em: http://www.nte-jgs.rct-sc.br/valente.htm

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais.* Lisboa: IIE.

Veloso, E. (1999). Ensino da Geometria: Ideias para um Futuro Melhor. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp.17-32). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Departamento de Educação.

Veloso, E. (2002). The Geometers Sketchpad (versão 4). *Educação e Matemática*, 66, 20-21. Lisboa: APM.

Veloso, E. (2004a). O gosto pela Matemática e o gosto por ser professor de Matemática. *Educação Matemática,* 80, 57.

Veloso, E. (2004b). Percepção visual e visualização. In Bairral, M. & Giménez , J., *Geometria para 3.º e 4.º ciclos pela internet* (pp.45-49). Rio de Janeiro: Editora Universidade Rural.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas. Textos de Geometria para professores. Grupo de Trabalho de Geometria.* APM.

Veloso, E.; Fonseca, H.; Ponte, J. & Abrantes, P. (Orgs.) (1999). *Ensino da Geometria no Virar do Milénio.* Lisboa: DEFCUL.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.

Vygotsky, L. (1978). Mind in Society. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. In Sternberg, R.J. & Williams, W.M. (1999). *Como desenvolver a criatividade do aluno*. Cadernos do CRIAP. ASA Editores II, S.A., p.49.

Vygotsky, L. S. (1987). *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Y

Yin, R. (1984). *Case Study research: design and methods*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. London: Sage Publications.

Yin, R. (2005). *Introducing the world of education. A case study reader.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Yin, R. (2010). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos.* Porto Alegre: Bookman.

Z

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar.* Porto Alegre: ARTMEDEditora.

Zamir, H. & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13(1). Routledge.

Zaslavsky, O. (1991). In what ways are similar figures similar?. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 378-385). Assisi, Itália: PME.

ANEXOS

ANEXO 01

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação:

No âmbito do Curso de Mestrado em Didáctica: Área de especialização – Tecnologia, da Universidade de Aveiro, estou a desenvolver um projeto de ensino e aprendizagem na temática da Geometria.

Mais especificamente e de um modo muito sucinto, com este projeto pretendo estudar qual o impacto da implementação de uma sequência didática no tópico "Transformações geométricas" operacionalizada através de tarefas focadas na exploração de isometrias e do conceito de simetria no desenvolvimento da criatividade, de uma mais sólida apropriação de conhecimentos e de uma atitude mais favorável em relação à Matemática.

Para o efeito, necessito de recolher dados sobre o trabalho dos alunos durante as aulas do tópico "Transformações Geométricas" que decorrerão no início do 3º Período. A recolha de dados basear-se-á num questionário, na observação das aulas (das quais registaria, fotograficamente e em áudio, alguns momentos), nas tarefas realizadas pelos alunos, em dois testes e em entrevistas individuais.

Face ao exposto, solicito autorização para proceder à recolha de dados junto do(a) seu(sua) educando(a) comprometendo-me, desde já, a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos. Acrescento, ainda, que este estudo não irá interferir no cumprimento do programa estabelecido para o 6º ano de escolaridade à disciplina de Matemática.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, apresento os meus melhores cumprimentos.

_________, ___ de fevereiro de 2012

O professor de Matemática

____

✂---

Autorizo que o meu(inha) educando(a) ____, nº ____ da turma __ do 6.º ano, participe na recolha de dados dirigida pelo professor Artur Coelho, no âmbito da sua dissertação de Mestrado.

Data: __________________________

Assinatura:____

ANEXO 02

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO À DIREÇÃO DA ESCOLA

Exmo. Senhor Diretor do

Agrupamento de Escolas de [redacted]

Eu, Artur Jorge Afonso Coelho , venho, por este meio, solicitar a sua autorização para desenvolver, com a turma [redacted] do 6º ano de escolaridade, um projeto de ensino e aprendizagem no âmbito da Geometria.

Mais especificamente e de um modo muito sucinto, com este projeto pretendo estudar qual o impacto da implementação de uma sequência didática no tópico "Transformações Geométricas" operacionalizada através de tarefas focadas na exploração de isometrias e do conceito de simetria no desenvolvimento da criatividade, de uma mais sólida apropriação de conhecimentos e de uma atitude mais favorável em relação à Matemática.

O projeto diz respeito a uma investigação individual que estou a desenvolver no âmbito do Curso de Mestrado em Didática: Área de especialização – Tecnologia, da Universidade de Aveiro e que culminará com a minha Dissertação de Mestrado.

Comprometo-me a solicitar autorização aos Encarregados de Educação para que os seus educandos participem no estudo e, quer no processo de recolha de dados quer no relatório da investigação, a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos e da escola.

Fico à inteira disposição de V. Ex.ª para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo desde já a sua colaboração, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

_________, ___ de fevereiro de 2012

Pede deferimento,

____

(Artur Coelho)

ANEXO 03

QUESTIONÁRIO INICIAL

Com este questionário pretende-se, principalmente, caracterizar a turma de modo a efetuar os ajustes necessários à planificação do tópico "Reflexão, rotação e translação" no âmbito do tema "Geometria". Mais concretamente, pretende-se obter informações sobre os gostos, hábitos e alguns conhecimentos básicos de utilização do computador, bem como se gostam de Geometria, qual a importância que lhe atribuem, com que software já trabalharam. Pretende-se também recolher informações sobre a noção que os alunos têm de criatividade e a sua relação com o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Responde ao questionário com a maior sinceridade. Tenta ser coerente e rigoroso(a) nas tuas respostas. Obrigado pela tua colaboração.

Questionário inicial

I. Identificação

1. Nome:	____________________
2. Idade:	____________________
3. Sexo:	Feminino ☐ Masculino ☐
4. Localidade:	____________________

II. Percurso Escolar

5. Que nível obtiveste à disciplina de Matemática no final do ano letivo anterior?	1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐
6. Gostas de Matemática?	Sim ☐ Não ☐
7. Consideras-te bom aluno a Matemática?	Muito Bom ☐ Razoável ☐ Fraco ☐ Muito fraco ☐

III. Uso do Computador

8. Tens computador em casa?	Sim ☐ Não ☐ (se não, avança para a questão 10)
9. O computador que tens em casa tem ligação à Internet?	Sim ☐ Não ☐
10. Gostas de utilizar o computador?	Gosto Muito ☐ Gosto ☐ Gosto pouco ☐ Não gosto ☐

11. Consideras que o teu conhecimento a nível de informática é:	Elevado ☐ Médio ☐ Fraco ☐ Nulo ☐

12. Onde e com que frequência costumas utilizar o computador?
(Marca uma cruz no local adequado. Podes escolher mais do que uma opção)

	Diariamente	Semanalmente	Raramente	Nunca
Em casa	☐	☐	☐	☐
Em casa de familiares	☐	☐	☐	☐
Em locais públicos	☐	☐	☐	☐
Na escola	☐	☐	☐	☐
Noutro local	☐	☐	☐	☐
Qual?				

13. Com que fins utilizas o computador?
(Marca uma cruz no local adequado. podes escolher mais do que uma opção)

	Sempre	Quase sempre	Raramente	Nunca
Como ferramenta de estudo	☐	☐	☐	☐
Como meio de comunicação	☐	☐	☐	☐
Como instrumento lúdico	☐	☐	☐	☐
Com outra finalidade	☐	☐	☐	☐
Qual?				

14. Sabes abrir um ficheiro que esteja guardado?

Numa pasta do computador	Sim ☐	Não ☐
Numa pendrive	Sim ☐	Não ☐
Num CD-ROM	Sim ☐	Não ☐

15. Consideras que o uso de computadores para ensinar e aprender é:	Muito importante ☐	Importante ☐
	Pouco importante ☐	Nada importante ☐

IV. A Geometria

16. Gostas de Geometria? Gosto muito ☐ Gosto ☐ Gosto pouco ☐ Não gosto ☐

17. Consideras importante a Geometria? Muito importante ☐ Importante ☐ Pouco importante ☐ Nada importante ☐

18. Gostaste das aulas de Geometria nos anos anteriores?

Porquê?____

____

____

V. Ambientes (dinâmicos) de Geometria Dinâmica

19. Qual das seguintes aplicações de geometria conheces? Cabri-Geomètre ☐ Cinderella ☐ Geometer´s Sketchpad ☐ Geogebra ☐

20. Já alguma vez trabalhaste com algum software de Geometria? Sim ☐ Não ☐

Qual? ____________________________________

VI. Representações acerca da criatividade em Matemática

21. O que significa para ti ser criativo?

____

____

____

____

____

22. Em que áreas pensas que é possível ser criativo?

____

____

____

23. É possível ser criativo a Matemática? Sim ☐ Não ☐

Justifica.

____

____

____

24. Para cada afirmação, seleciona a opção que consideres mais adequada.

	Concordo fortemente	Concordo	Discordo	Nunca	Sem opinião
Eu considero-me criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
A criatividade é um dom raro que só algumas pessoas possuem.	☐	☐	☐	☐	☐
A criatividade varia consoante a idade.	☐	☐	☐	☐	☐
A criatividade é uma característica individual.	☐	☐	☐	☐	☐
A criatividade pode ser desenvolvida na maioria das pessoas se lhe for dada essa oportunidade.	☐	☐	☐	☐	☐
A criatividade é uma capacidade fundamental.	☐	☐	☐	☐	☐
A escola limita a criatividade dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
E possível avaliar a criatividade dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
Em Matemática, está tudo criado, não se cria nada de novo.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática é uma disciplina criativa como a Música e outras artes.	☐	☐	☐	☐	☐
Em Matemática não se pode ser muito criativo, é "aquilo e aquilo mesmo".	☐	☐	☐	☐	☐
Aulas de Matemática criativas são essenciais para melhorar as aprendizagens dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐

VII. Trabalho em sala de aula

25. Como gostas mais de trabalhar dentro da sala de aula?

Em grupo turma ☐ Sozinho ☐

Em pares ☐ Em pequeno grupo ☐

Justifica a tua opção:____

____

____

____

As tuas respostas a este inquérito terminaram.
Muito obrigado.

ANEXO 04

TESTE DE COMPETÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Teste de avaliação de competências tecnológicas

1. Nome:	____________________
2. Número:	____________________
2. Data:	____________________

Tarefa I

1. Liga o computador e inicia a aplicação chamada *GeoGebra*.

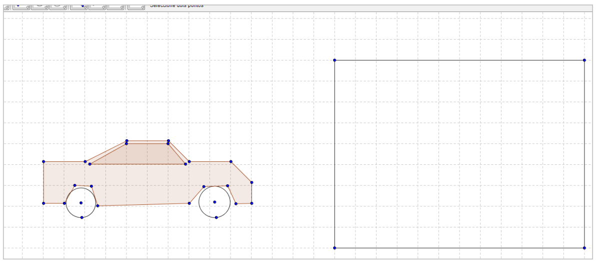
2. Utilizando as ferramentas do programa, desenha livremente retas, polígonos e outras figuras. Movimenta-as como quiseres. Altera o estilo e a cor dos diferentes objetos que criaste.

3. Grava o teu trabalho como ***tarefa_1*** no ambiente de trabalho do computador.

Tarefa II

1. Seleciona agora toda área de trabalho e limpa-a.

2. Utilizando as várias ferramentas e dando largas à tua criatividade, constrói uma representação de um carro. Usa livremente as cores e os estilos da forma que achares mais interessante.



3. Constrói um retângulo com um tamanho suficiente para que a totalidade do carro que criaste caiba no seu interior (nota que o teu polígono só é verdadeiramente um retângulo se, ao arrastar qualquer vértice ou lado, os seus ângulos permanecem todos com 90º).

4. Pesquisa, no sistema de ficheiros do computador, na internet ou utiliza uma "pendrive" e insere uma imagem à tua escolha no interior do retângulo.

5. Grava o teu trabalho como ***tarefa_2*** no ambiente de trabalho do computador.

Tarefa III

1. Copia os ficheiros ***tarefa_1*** e ***tarefa_2*** para uma pasta com o teu nome. Grava essa pasta numa "pendrive". Comprime agora a pasta e envia-a por email para o teu professor.

Autoavaliação do teste de competências tecnológicas

Responde ao questionário com a maior sinceridade. Tenta ser coerente e rigoroso(a) nas tuas respostas. Obrigado pela tua colaboração.

Antes de realizar as tarefas acho que:
(Marca uma cruz no local adequado)

	sei fazer	sei fazer mas tenho dificuldades	não sei fazer
Tarefa I.1	☐	☐	☐
Tarefa I.2	☐	☐	☐
Tarefa I.3	☐	☐	☐
Tarefa II.1	☐	☐	☐
Tarefa II.2	☐	☐	☐
Tarefa II.3	☐	☐	☐
+Tarefa II.4	☐	☐	☐
Tarefa II.5	☐	☐	☐
Tarefa III.1	☐	☐	☐
Tarefa III.1 (email)	☐	☐	☐

Quando tentei realizar as tarefas:
(Marca uma cruz no local adequado)

	fiz sem dificuldades	fiz sozinho mas com dificuldade	fiz com ajuda	não consegui fazer
Tarefa I.1	☐	☐	☐	☐
Tarefa I.2	☐	☐	☐	☐
Tarefa I.3	☐	☐	☐	☐
Tarefa II.1	☐	☐	☐	☐
Tarefa II.2	☐	☐	☐	☐
Tarefa II.3	☐	☐	☐	☐
Tarefa II.4	☐	☐	☐	☐
Tarefa II.5	☐	☐	☐	☐
Tarefa III.1	☐	☐	☐	☐
Tarefa III.2 (email)	☐	☐	☐	☐

O questionário de autoavaliação terminou.
Obrigado e bom trabalho

ANEXO 05

TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste de avaliação - Isometrias

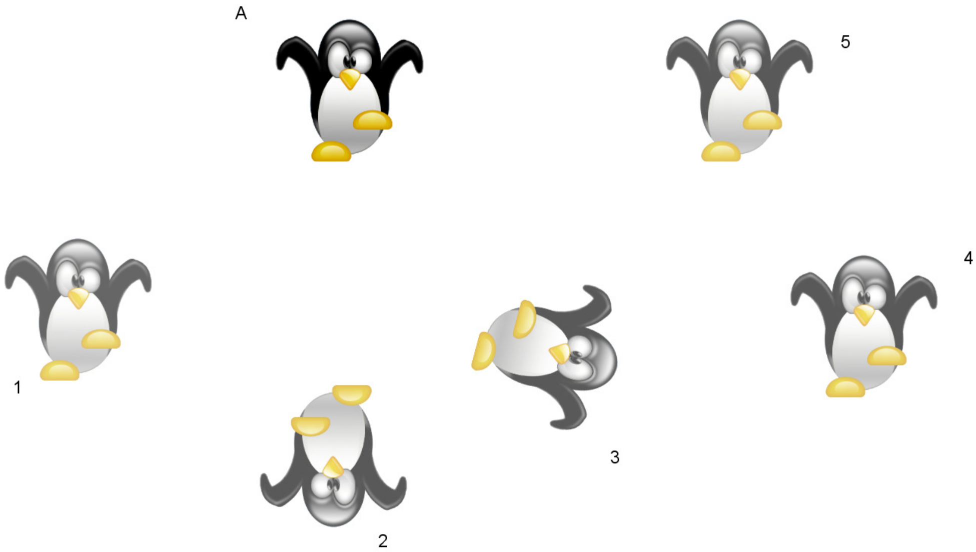
Nome: ____________________

Número: ____________________

Data: ____________________

Reflexão

1. Dos pinguins em seguida representados, descobre qual deles é uma imagem obtida por reflexão do pinguim **A**. Traça o respetivo eixo de reflexão.

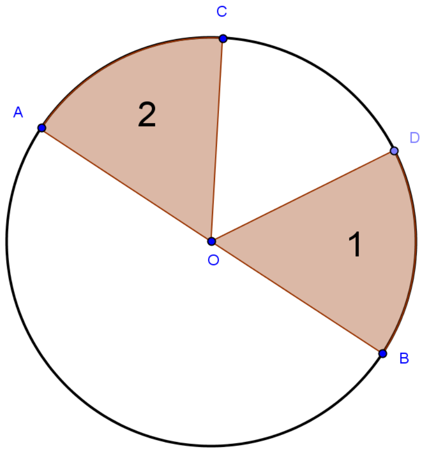


Translação

2. As figuras 6, 7 e 8 foram obtidas por translações da figura B. Descobre, para cada translação, o vetor aplicado. Representa-os na área quadriculada à direita.

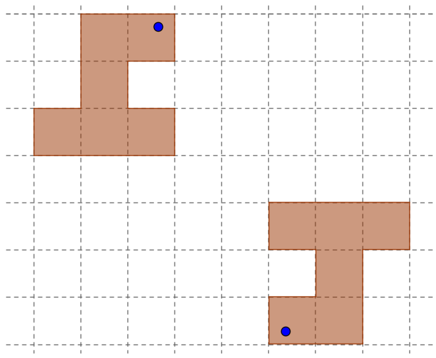
Rotação

3. Na imagem que se segue, o ponto **O** é o centro do círculo. Os arcos **AC**, **CD** e **BD** são congruentes. Caracteriza a rotação que transforma a figura **1** na figura **2**.



Composição de isometrias

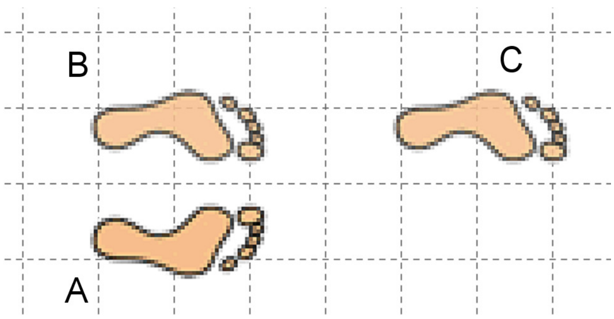
4. Identifica e caracteriza a composição de isometrias que permitem transformar a figura **A** na figura **B**.



5. Observa a imagem que se segue. Caracteriza a isometria que permite obter:

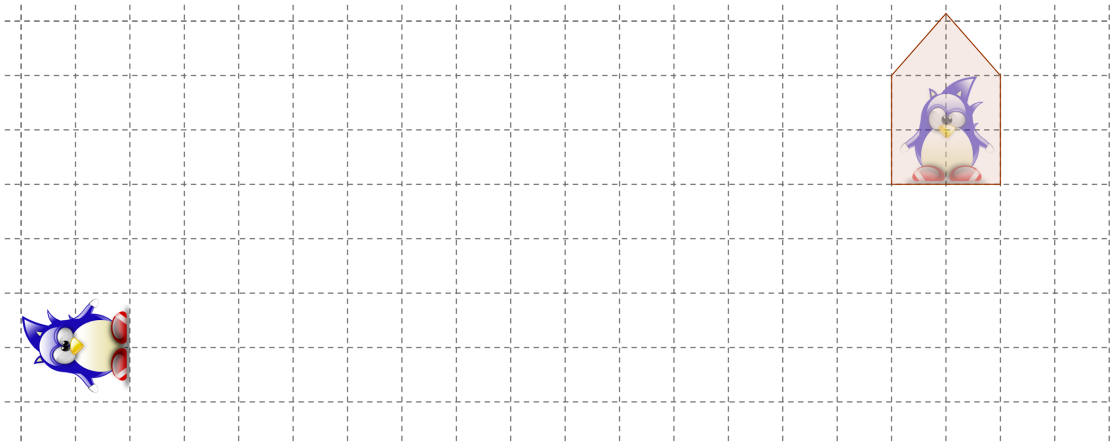
5.1. A pegada **B** como imagem da pegada **A**;

5.2. A pegada **C** como imagem da pegada **B**;



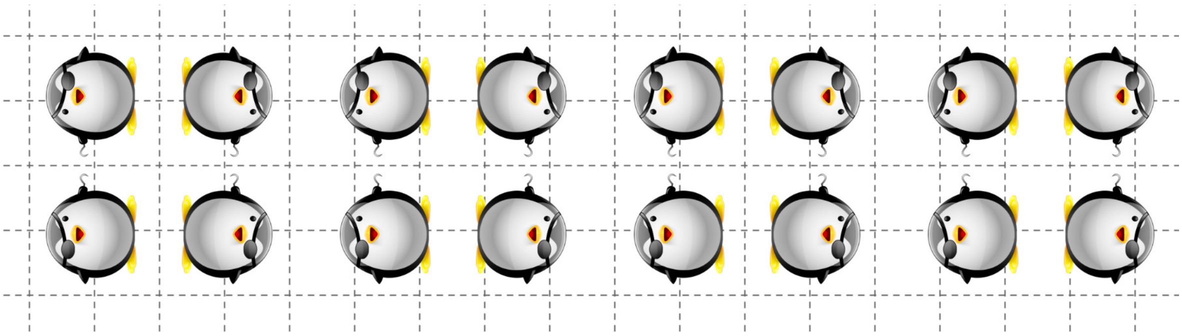
5.3. Diretamente, a pegada **C** como imagem da pegada **A**.

6. Tenta descobrir como é possível levar o *Tux* do sítio onde está até sua casa utilizando isometrias. Com a ajuda do *GeoGebra*, tenta reproduzir o seu percurso (lembra-te que podes utilizar: rotações, translações e reflexões) e regista em papel todos os procedimentos.



Frisos

7. Observa o friso que se segue. Descreve duas formas diferentes de o obter.

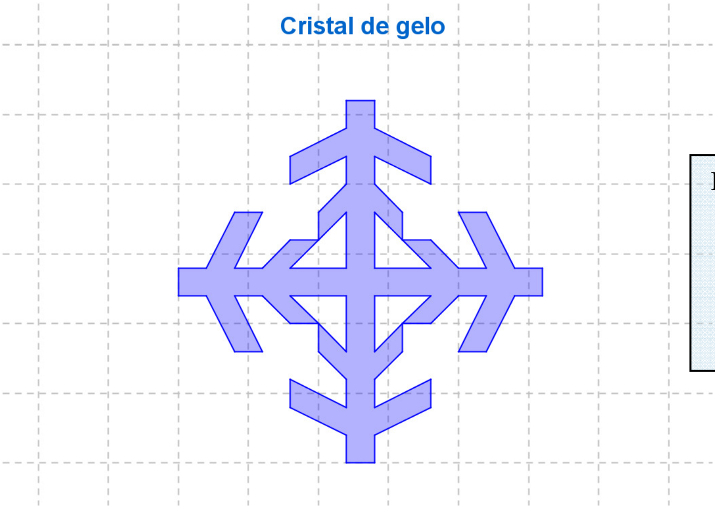


8. Cria livremente, utilizando diferentes isometrias, uma composição de figuras geométricas.

9. Descreve como procedeste para elaborar a composição anterior.

Simetria

10. Abre o ficheiro "cristal_de_gelo.ggb" com o GeoGebra e observa atentamente a imagem que representa um cristal de gelo.



In *Novos desafios para uma Matemática criativa.* Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro. ISBN 978-972-789-344-7

10.1 Identifica todas as simetrias da figura caracterizando as isometrias correspondentes.

Bom trabalho!

ANEXO 06

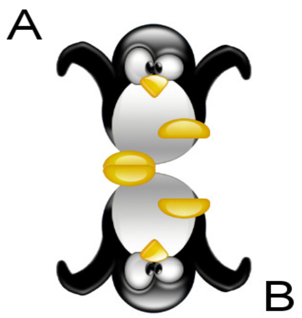
SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA I

Tarefa I

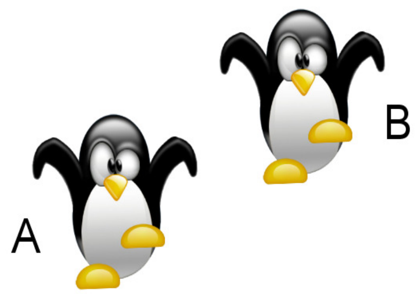
Nome:	______________________________
Número:	______________________________
Data:	______________________________

1. Recorrendo ao acetato e/ou ao "mira", descobre como podes transformar o pinguim A no pinguim B.

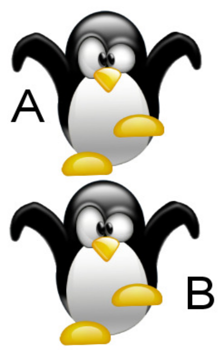
1



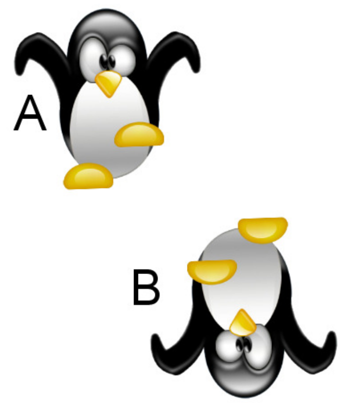
2



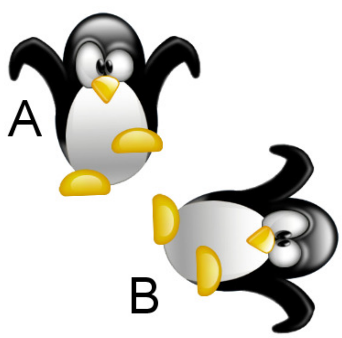
3



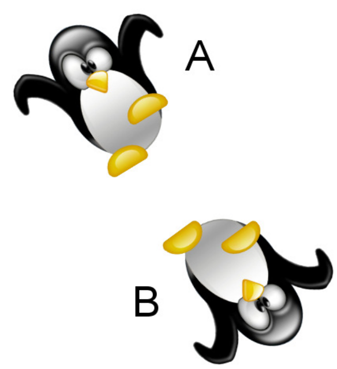
4



5

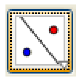


6



2. Foi sempre possível obter o pinguim B a partir do pinguim A? Explica como procedeste em cada uma das situações apresentadas.

1
2
3
4
5
6

3. Recorrendo ao GeoGebra, tenta replicar as isometrias que descobriste no papel. Para isso insere a imagem *Tux1* e utiliza a *caixa de ferramentas das transformações*  para as selecionares. No final, não te esqueças de guardar o teu ficheiro com o nome ***tarefa1***.

4. Ainda no GeoGebra, e utilizando isometrias, cria uma construção a teu gosto.

ANEXO 07

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA II

Tarefa II

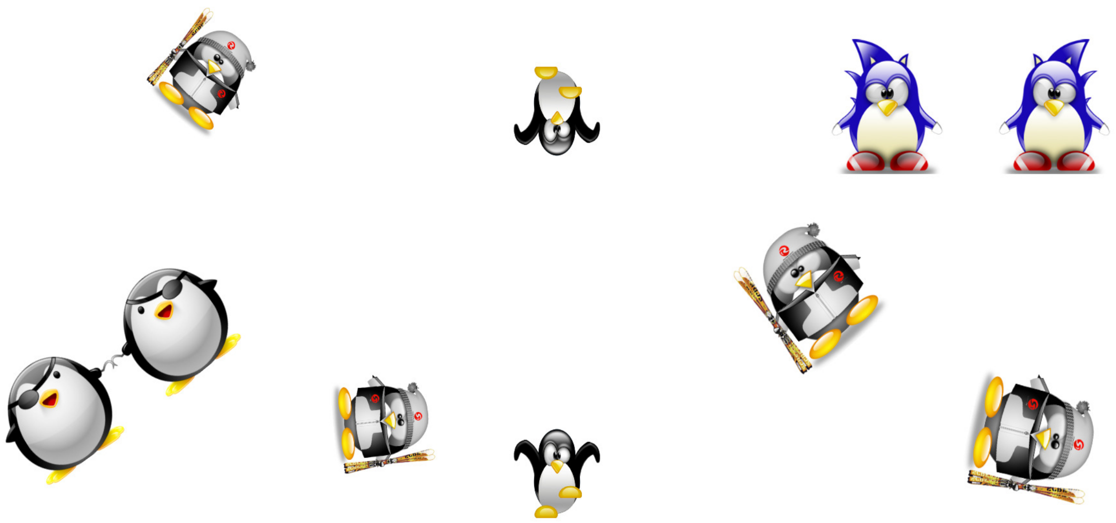
Nome: ____________________

Número: ____________________

Data: ____________________

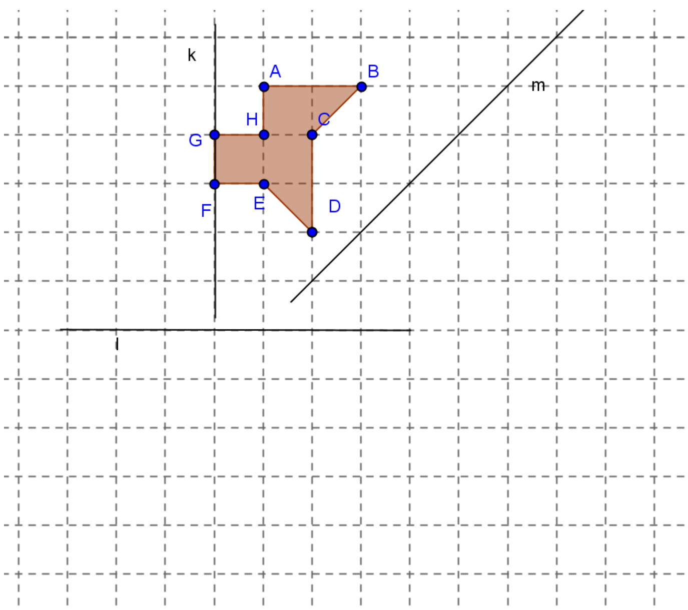
1. Observa as imagens seguem.

1.1. Traça, com a ajuda de um *Mira*, os respetivos eixos de reflexão.



1.2. Tenta reproduzir as reflexões aqui representadas no GeoGebra. No final, não te esqueças de guardar o teu ficheiro com o nome ***tarefa_2.ggb***.

2. Desenha os transformados da seguinte figura, considerando as retas representadas como eixos de reflexão. Confirma os teus desenhos com o *Mira*.



ANEXO 08

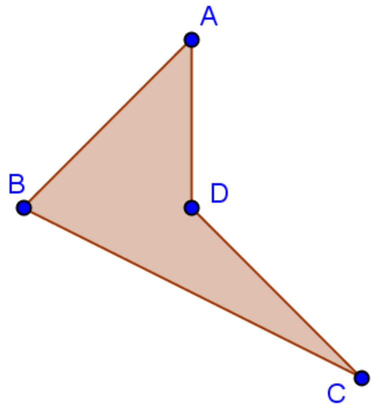
SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA III

Tarefa III

Nome:	______________________________
Número:	______________________________
Data:	______________________________

1. No GeoGebra abre o ficheiro **rot_1.ggb** (fornecido pelo professor). Desenha as imagens do quadrilátero obtidas por:
   -uma rotação de 120º no sentido positivo em torno do ponto C;
   -uma rotação de 120º no sentido negativo em torno do ponto C.

2. Procede do mesmo modo como o indicado na questão anterior, mas utilizando agora uma folha de acetato, um transferidor e um compasso.



3. No GeoGebra, cria uma composição a teu gosto, aplicando diferentes rotações. Não te esqueças de guardar o teu ficheiro com o nome **tarefa_3.ggb**.

4. Explica como procedeste para concretizar a composição proposta na questão 1.

ANEXO 09

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA IV

Tarefa IV

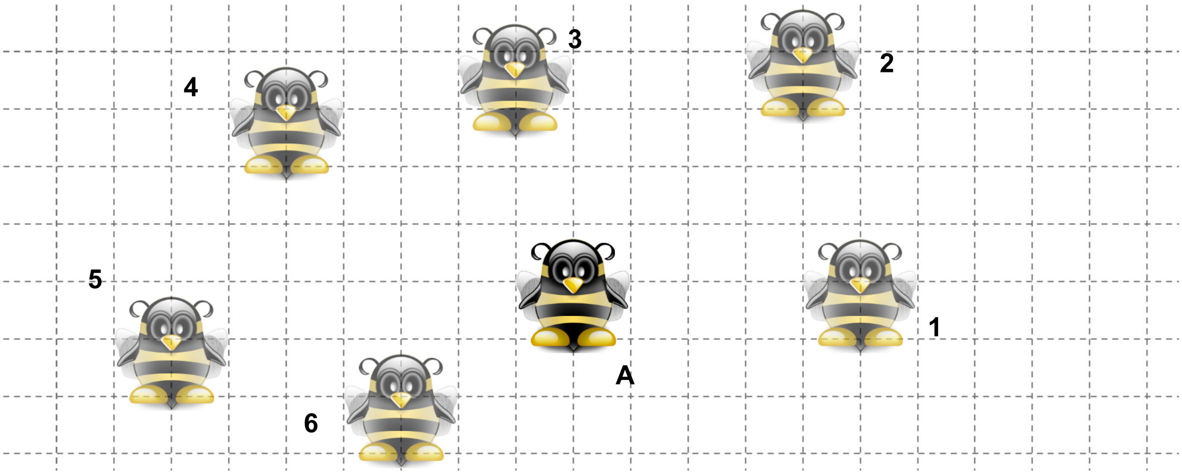
Nome: ______________________________

Número: ______________________________

Data: ______________________________

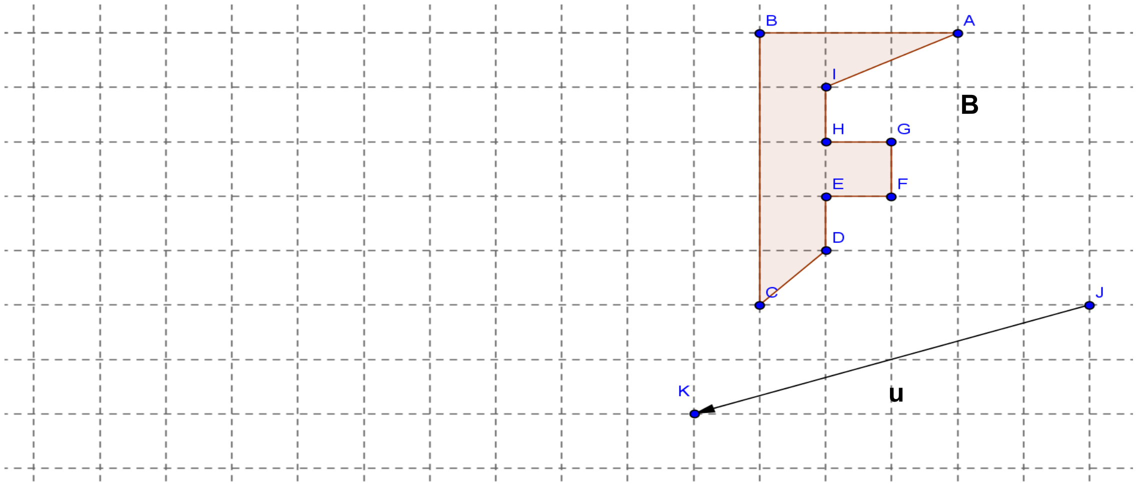
1. As figuras 1, 2, 3, 4, 5 e 6 foram obtidas por translações da figura A.

1.1. Descobre, para cada translação, o vetor aplicado. Representa-os na área quadriculada abaixo.



1.2. Nomeia esses vetores com letras minúsculas e caracteriza-os.

2. Desenha a imagem da figura **B** obtida por uma translação associada ao vetor **u.**



2.1. O que acontece à imagem (posição, tamanho, orientação) se alterares a medida do comprimento do vetor? E se alterares a direção do vetor?

3. No GeoGebra, cria uma composição a teu gosto aplicando translações. Guarda o teu trabalho com o nome ***tarefa_4.ggb***.

ANEXO 10

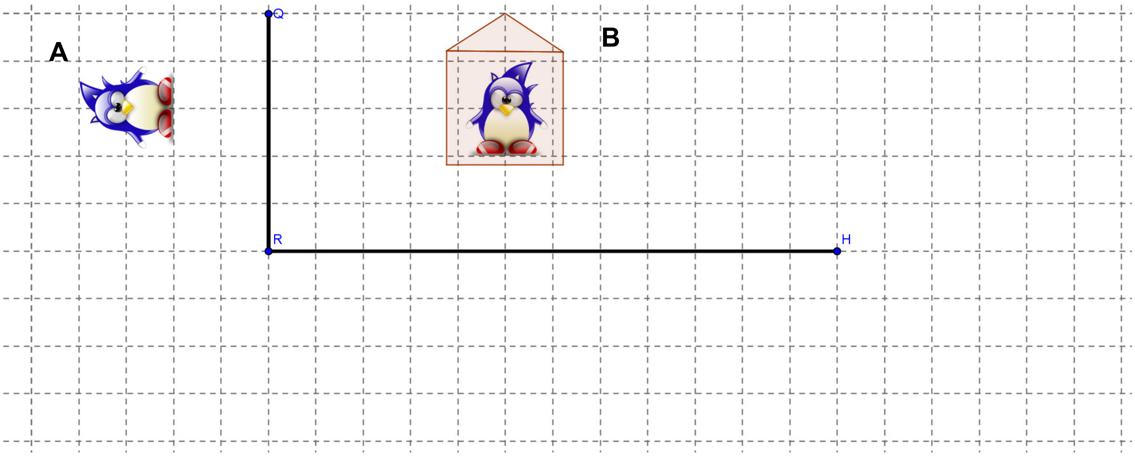
SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA V

Tarefa V

Nome:	______________________________
Número:	______________________________
Data:	______________________________

1. No GeoGebra, abre o ficheiro ***comp_iso.ggb*** (fornecido pelo professor).

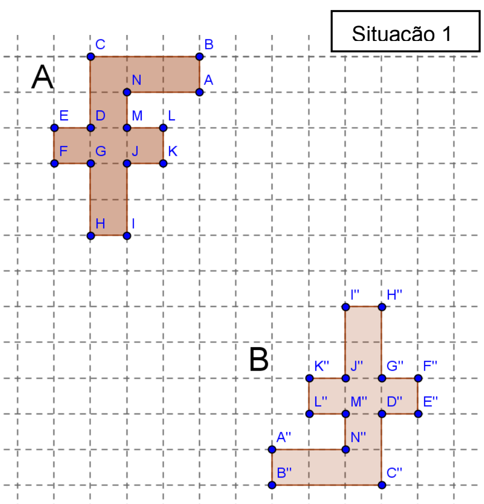
1.1. Utilizando livremente as isometrias que já conheces, e sem atravessar as linhas pretas, desloca o *Tux* da posição (A) para a posição (B). Grava o teu trabalho com o nome ***tarefa_5_1.ggb.***

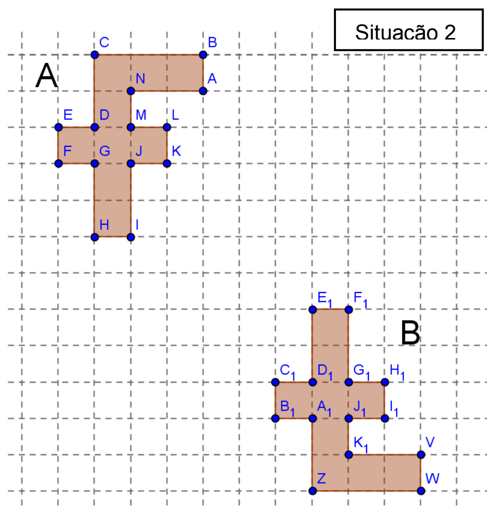


1.2. Descreve todas as transformações efetuadas.

2. No GeoGebra, desenha um polígono igual ao da imagem **A**.

2.1. Utilizando as isometrias e as ferramentas que conheces neste programa, tenta descobrir em cada situação, de que formas foi possível obter a imagem **B** a partir da figura **A**. Grava o teu trabalho com o nome ***tarefa_5_2.ggb.***





2.2. Explica, para cada caso, como procedeste.

2.3. Observa com atenção a situação 2.

Existe uma isometria capaz de capaz de transformar diretamente a figura A na figura B. Esta isometria chama-se:

3. No GeoGebra, cria uma construção a teu gosto onde utilizes composições de isometrias. Grava o teu trabalho com o nome **tarefa_5_3.ggb**.

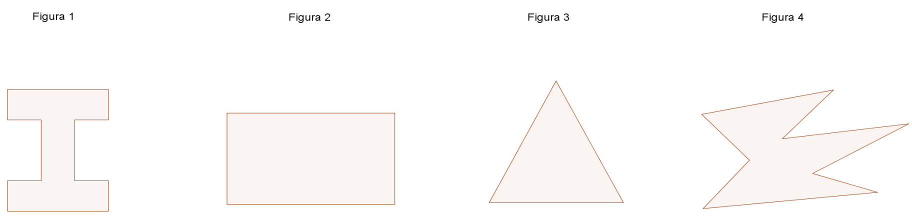
ANEXO 11

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA VI

Tarefa VI

Nome:	______________________________
Número:	______________________________
Data:	______________________________

1. Observa atentamente as figuras.



1.1. Para cada figura, manipula o mira de modo a que a figura inicial permaneça invariante.

1.2. Em quantas posições diferentes é possível colocar esses eixos? (completa o quadro que se segue)

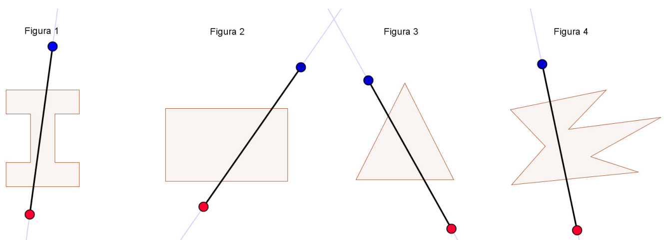
Nota: como extensão da actividade, podes estudar o caso do círculo

	Descrição da posição dos eixos	Número de eixos de simetria
Figura 1		
Figura 2		
Figura 3		
Figura 4		

1.3. Observa o quadro anterior. Discute com os teus colegas acerca do registo relativo à figura 4.

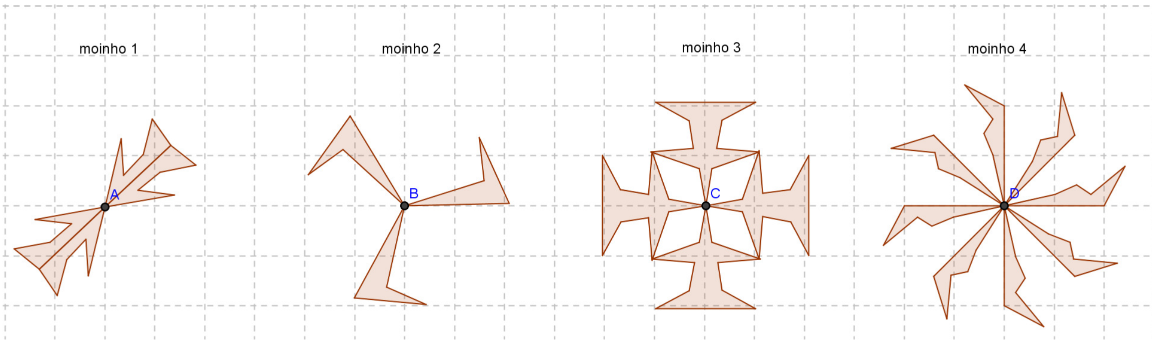
2. No GeoGebra, abre o ficheiro "***simetria_RF1.ggb***" (fornecido pelo professor) e observa atentamente a imagem.

2.1. Manipula o eixo dado em cada figura para uma posição onde prevejas que uma reflexão associada a esse eixo deixe a figura invariante.



2.2. Para verificar as tuas previsões, aplica uma reflexão a cada uma das figuras utilizando o eixo nessa posição. Se necessário, manipula, agora, cada eixo de reflexão de modo a que a figura inicial permaneça invariante.

3. Observa a imagem que se segue. Copia, em papel vegetal, cada moinho individualmente. Sobrepõe-nos agora às respetivas figuras no papel. Introduz um pionés nos pontos A, B e C.



3.1. Para cada moinho:
Roda o papel vegetal, apenas no sentido retrógrado, de modo a que a figura se sobreponha à da base. De quantas formas diferentes o consegues fazer?

3.2. Mede as amplitudes dos ângulos (inferiores a 360º) de cada rotação efectuada e completa o quadro.

	Centro	**Medida(s) da(s)amplitude(s) do(s) ângulo(s)**	**Relação entre a medida do menor ângulo e 360º**	**Número de pás do moinho**
moinho 1				
moinho 2				
moinho 3				
moinho 4				

3.3. Confirma os resultados no GeoGebra (abre o ficheiro **moinhos.ggb** fornecido pelo professor) e discute com os teus colegas os registos do quadro.

4. Utilizando o GeoGebra, constrói uma figura a teu gosto que apresente simetrias.

Adaptado de *Novos desafios para uma Matemática criativa.* Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro. ISBN 978-972-789-344-7

ANEXO 12

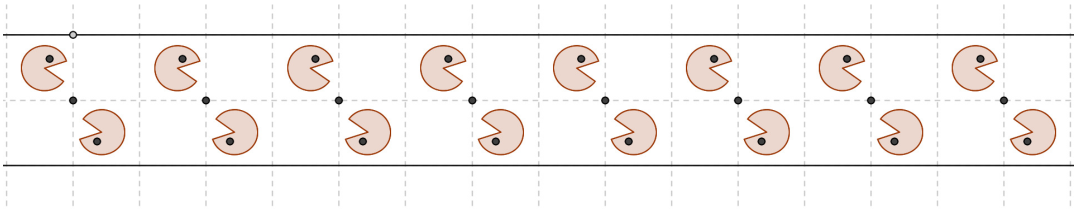
SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TAREFA VII

Tarefa VII

Nome:	______________________________
Número:	______________________________
Data:	______________________________

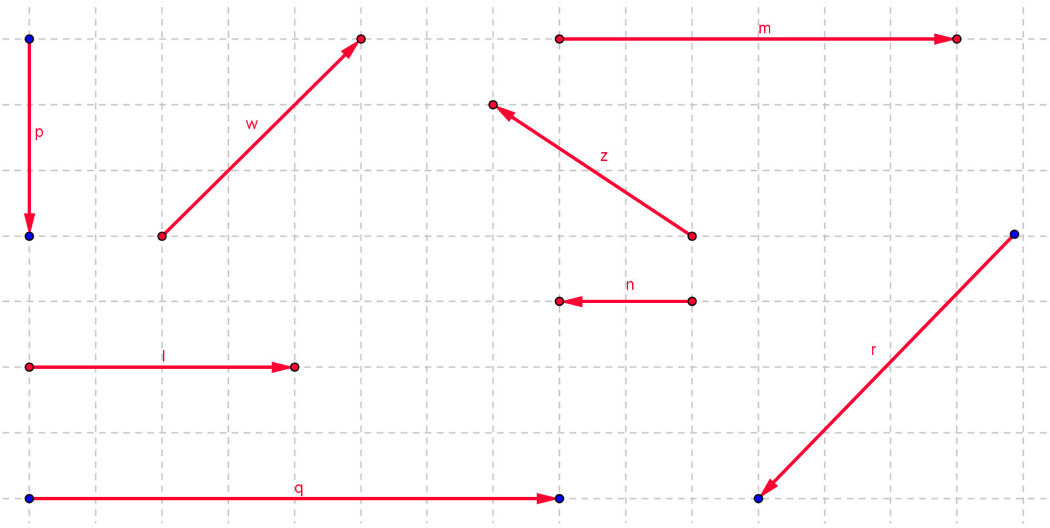
1. Observa atentamente a imagem.

Figura 1



1.1. Desloca o acetato (fornecido pelo professor) sobre a figura 1 e 'descobre' um vector que permita que a translação a ele associada e aplicada à figura 1 a mantenha invariante. Desenha-o no quadriculado que se segue.

1.2. Na imagem que se segue, selecciona o(s) vector(es) de tal forma que a translação a ele(s) associada e aplicada à figura 1 permita que apresente simetria.

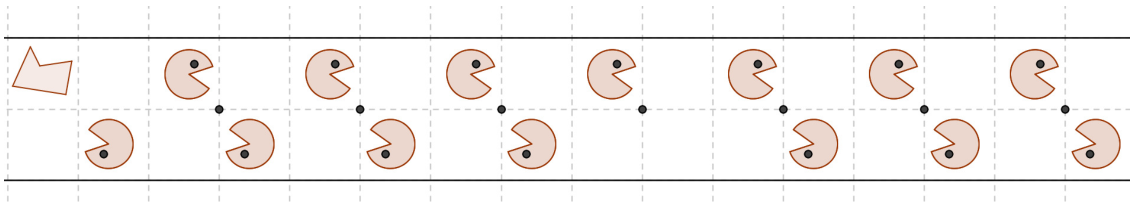


1.3. Completa o quadro, considerando os vectores que seleccionaste.

Vector	Direcção	Sentido	Medida de comprimento do vector

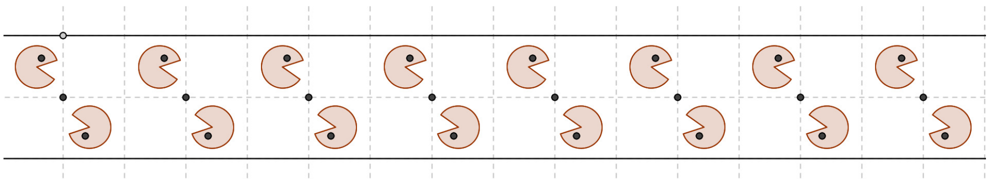
1.4. Observa com atenção o quadro anterior. Escreve uma expressão numérica que traduza a medida de comprimento dos vectores associados à translação que satisfaz a condição estabelecida na alínea 1.2.

1.5. Observa atentamente a imagem que se segue. Será possível encontrar algum vector que permita que a translação a ele associada e aplicada à figura a mantenha invariante? Justifica a tua resposta.



R:

2. No GeoGebra, abre o ficheiro "***simetria_T1.html***" (fornecido pelo professor) e observa atentamente a imagem.



2.1. Manipula o ponto vermelho de modo a 'descobrires' um vector que permita que a translação a ele associada e aplicada à figura a mantenha invariante. Caracteriza esse vector.

2.2. Qual a medida de comprimento de quatro vectores, com sentido da esquerda para a direita, que permitem que a translação a eles associada e aplicada à figura apresente simetria? (nota: não considerar o vector nulo). Compara esses valores com os registados na tabela anterior. O que concluis?

2.3. A expressão que escreveste na alínea 2.4. também se pode aplicar a estes valores agora obtidos?

3. No quadriculado que se segue, cria um friso.

4. No GeoGebra, constrói um friso a teu gosto. Identifica e caracteriza as isometrias nele presentes.

Adaptado de *Novos desafios para uma Matemática criativa.* Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro. ISBN 978-972-789-344-7

ANEXO 13

QUESTIONÁRIO FINAL

Questionário final

Com este questionário pretende-se perceber a tua opinião e a forma como percecionaste a abordagem do tópico "Reflexão, rotação e translação" no âmbito do tema "Geometria e medida". Tenta ser coerente e rigoroso(a) nas tuas respostas. Obrigado pela tua colaboração.

Assinala com um (**x**) a resposta que melhor corresponde à tua opinião.

I. Identificação

1. Nome: ____

II. As ferramentas

2. Para cada afirmação, seleciona a opção que consideres mais adequada.

	Concordo fortemente	Concordo	Discordo	Nunca	Sem opinião
2.1. Foi importante ter trabalhado com "papel e lápis".	☐	☐	☐	☐	☐
2.2. Foi importante ter utilizado instrumentos de medida e de desenho - régua esquadro, compasso e transferidor.	☐	☐	☐	☐	☐
2.3. O programa informático iTALC não foi de grande ajuda para o desenrolar das tarefas.	☐	☐	☐	☐	☐
2.4. Esta aplicação facilitou o processo de ensinar e de aprender.	☐	☐	☐	☐	☐
2.5. Esta aplicação apenas serve para controlar os alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
2.5. Foi fácil a familiarização com o GeoGebra.	☐	☐	☐	☐	☐
2.6. Este software é muito pouco interessante.	☐	☐	☐	☐	☐
2.7. Este software permite uma aprendizagem mais ativa e dinâmica da Geometria.	☐	☐	☐	☐	☐
2.8. Este software facilita o trabalho com as transformações geométricas.	☐	☐	☐	☐	☐
2.9. Este software promove a autonomia dos alunos nas aprendizagens.	☐	☐	☐	☐	☐
2.10. Este software não se presta um trabalho individual.	☐	☐	☐	☐	☐
2.11. Este software não se presta a um trabalho de pares.	☐	☐	☐	☐	☐
2.12. O uso desta ferramenta promove a interação entre os	☐	☐	☐	☐	☐

III. A criatividade

3. Para cada afirmação, seleciona a opção que consideres mais adequada.

	Concordo fortemente	Concordo	Discordo	Nunca	Sem opinião
3.1. As tarefas "tradicionais" limitam a criatividade dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
3.2. Aulas de Matemática criativas são essenciais para melhorar as aprendizagens dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
3.3. Eu considero-me mais criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
3.4. Ser criativo é difícil.	☐	☐	☐	☐	☐
3.5. As tarefas propostas não contribuíram para desenvolver a minha criatividade.	☐	☐	☐	☐	☐
3.6. Quando observei os trabalhos de outros alunos pude ser mais criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
3.7. Quando observei os trabalhos de outros alunos quis ser mais criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
3.8. Se gosto da tarefa que estou a realizar, sou mais criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
3.9. É possível avaliar a criatividade dos alunos.	☐	☐	☐	☐	☐
3.10. A criatividade pode ser treinada.	☐	☐	☐	☐	☐
3.11. Não imaginava que a "matemática" fosse possível produzir trabalhos criativo.	☐	☐	☐	☐	☐
3.12.					

4. As tarefas propostas nas aulas foram criativas? Sim ☐ Não ☐

Justifica a tua opção?

____

____

5. Os professores valorizam os trabalhos criativos dos alunos? Sim ☐ Não ☐

Justifica a tua opção?

____

____

6. O que achas que distingue um trabalho criativo de outro pouco criativo?

____

____

IV. Transformações geométricas: isometrias, simetria e frisos

7. A forma como foi implementado este tópico, por recurso sistemático ao GeoGebra, contribuiu para:	Concordo fortemente	Concordo	Discordo	Nunca	Sem opinião
7.1. perceber melhor o que são isometrias.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____
____
____

7.2. "ver" como se formam os frisos.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____
____
____

7.3. entender melhor o conceito de simetria.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____
____
____

7.4. aprofundar outros conhecimentos de Geometria.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____
____
____

7.5. desenvolver a capacidade de resolver problemas, comunicar e raciocinar.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____
____
____

V. Atitudes

8. A forma como foi implementado este tópico, por recurso sistemático ao GeoGebra, contribuiu para:	Concordo fortemente	Concordo	Discordo	Nunca	Sem opinião
8.1. uma visão mais positiva da Geometria.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____

____

____

8.2. uma visão mais positiva da Matemática.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____

____

____

8.3. tornar a Geometria aborrecida e desmotivadora.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____

____

____

8.4. desenvolver o pensamento geométrico.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____

____

____

8.5. diminuir os meus receios face à Matemática.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____

____

____

8.6. aumentar o meu interesse pela Matemática.	☐	☐	☐	☐	☐

Porque:

____

____

____

As tuas respostas a este inquérito terminaram. Muito obrigado.

ANEXO 14

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

Critérios de Classificação do Teste (modalidade pré e pós)

Cotações

Questões	Assunto	Cotação
Questão 1	Reflexão	10
Questão 2	Translação	10
Questão 3	Rotação	10
Questão 4	Composição de Isometrias	8
Questão 5.1	Caracterização da reflexão	6
Questão 5.2	Caracterização da translação	6
Questão 5.3	Caracterização da reflexão deslizante	6
Questão 6	Isometrias em ADGD	8
Questão 7	Frisos	8
Questão 8	Construção livre	8
Questão 9	Descrição da construção livre	10
Questão 10	Simetria	10

Critérios gerais de classificação

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada questão.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

As não respostas são classificadas com zero pontos.

Salvo indicação em contrário no critério específico, se parte da resposta for suficiente para a atribuição de uma classificação mas contiver elementos contraditórios, à resposta será aplicada a desvalorização de 1 ponto para questões com cotação até 6 pontos e de 2 pontos para questões com cotação superior a 6 pontos.

A variações, designadamente, no rigor das construções geométricas, na localização e/ou orientação dos seus elementos e na linguagem usada para as descrever ou caracterizar correspondem variações na pontuação, situada no intervalo limitado pela pontuação relativa aos níveis de desempenho nos quais a resposta se poderia inserir.

No caso da utilização, por parte do aluno, de um processo de resolução que não esteja previsto no critério específico de classificação, adota-se um critério de distribuição da cotação total do item e utiliza-se em situações idênticas.

Critérios específicos de classificação

Os critérios específicos de classificação das respostas apresentam-se organizados por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

Questão 1 - Reflexão	Pontuação
Desenha, com rigor, o eixo de reflexão para o par de figuras A-3	10 pontos
Desenha, de forma pouco rigorosa, o eixo de reflexão para o par de figuras A-3	7 pontos
Desenha erradamente o eixo de reflexão mas assinala corretamente a imagem 3	4 pontos
Desenha incorretamente o eixo de reflexão e/ou assinala outras figuras diferentes da figura 3	0 pontos

Questão 2 - Translação	Pontuação
Representa corretamente os três vetores	10 pontos
Representa corretamente dois vetores	7 pontos
Representa corretamente apenas um vetor	4 pontos
Representa incorretamente os três vetores	0 pontos

Questão 3 - Rotação	Pontuação
Indica corretamente o sentido e a medida da amplitude do ângulo de rotação	10 pontos
Indica corretamente a medida da amplitude mas omite o sentido do ângulo de rotação	7 pontos
Indica uma medida da amplitude e o sentido do ângulo com alguma razoabilidade (ex:180º)	5 pontos
Indica uma medida da amplitude com alguma razoabilidade (ex: 90º ou 180º) mas não o sentido do ângulo	3 pontos
Indica uma medida da amplitude marcadamente incorreta	0 pontos

Questão 4 – Composição de isometrias	Pontuação
Identifica e caracteriza corretamente uma composição de isometrias que seja solução	8 pontos
Identifica e caracteriza, com pequenas imprecisões, uma composição de isometrias que seja solução	7 pontos
Identifica e caracteriza corretamente uma única isometria que seja solução	6 pontos
Identifica e caracteriza, com bastantes imprecisões, uma composição de isometrias que seja solução	5 pontos
Identifica e caracteriza, com imprecisões, uma única isometria que seja solução	4 pontos
Identifica e caracteriza, com bastantes imprecisões, uma única isometria que seja solução	2 pontos
Apresenta uma resposta diferente das anteriores	0 pontos

Questão 5.1 – Caracterização da reflexão	Pontuação
Identifica e caracteriza corretamente a reflexão	6 pontos
Indica “reflexão" e explicita parcialmente a posição do eixo	4 pontos
Indica “reflexão”	3 pontos
Apresenta uma resposta diferente das anteriores	0 pontos

Questão 5.2 – Caracterização da translação	Pontuação
Identifica e caracteriza corretamente a translação	6 pontos
Indica “translação” e explicita parcialmente as suas características	4 pontos
Indica “translação”	3 pontos
Apresenta uma resposta diferente das anteriores	0 pontos

Questão 5.3 – Caracterização da reflexão deslizante	Pontuação
Identifica e caracteriza corretamente a reflexão deslizante	6 pontos
Indica reflexão deslizante e explicita parcialmente as suas características	4 pontos
Indica reflexão deslizante ou uma composição de isometrias que seja solução	3 pontos
Apresenta uma resposta diferente das anteriores	0 pontos

Questão 6 – Isometrias no ADGD	Pontuação
Desloca a figura para o local indicado e explicita todos os procedimentos	8 pontos
Desloca a figura para o local indicado mas explicita os procedimentos com algumas imprecisões	6 pontos
Desloca a figura para o local indicado mas explicita os procedimentos de forma bastante imprecisa	5 pontos
Desloca a figura para o local indicado mas não explicita os procedimentos	4 pontos
Apresenta uma resposta diferente das anteriores	0 pontos

Questão 7 – Frisos	Pontuação
Descreve corretamente duas formas de obter o friso	8 pontos
Descreve duas formas de obter o friso com pequenas imprecisões	7 pontos
Descreve corretamente uma forma de obter o friso	5 pontos
Descreve uma forma de obter o friso com pequenas imprecisões	4 pontos
Descreve duas formas de obter o friso com imprecisões graves	3 pontos
Descreve uma forma de obter o friso com imprecisões graves	2 pontos
Não descreve qualquer forma de obter o friso	0 pontos

Questão 8 – Construção livre utilizando diferentes isometrias	Pontuação
Cria uma “composição” utilizando corretamente diferentes isometrias	8 pontos
Cria, com algumas imprecisões, uma “composição” utilizando diferentes isometrias	6 pontos
Cria, com bastantes imprecisões, uma “composição” utilizando diferentes isometrias	5 pontos
Cria uma “composição” utilizando corretamente apenas uma isometria	4 pontos
Cria uma “composição” utilizando apenas uma isometria com algumas imprecisões	3 pontos
Cria uma “composição” utilizando apenas uma isometria com bastantes imprecisões	2 pontos
Cria uma “composição” onde não utiliza qualquer isometria	0 pontos

Questão 9 – Descrição da construção livre	Pontuação
Descreve corretamente o procedimento	10 pontos
Descreve o procedimento com alguma falta de rigor	8 pontos
Descreve o procedimento com algumas falhas graves	5 pontos
Descreve o procedimento com bastantes falhas graves	3 pontos
Não descreve o procedimento	0 pontos

Questão 10 – Simetria	Pontuação
Identifica 4 simetrias rotacionais e 4 simetrias por reflexão caracterizando-as corretamente	10 pontos
Identifica 4 simetrias rotacionais e 4 simetrias por reflexão caracterizando-as com pequenas imprecisões	8 pontos
Identifica pelo menos 4 simetrias caracterizando-as corretamente	6 pontos
Identifica 4 simetrias rotacionais e 4 simetrias por reflexão caracterizando-as com bastantes imprecisões	5 pontos
Identifica pelo menos 4 simetrias caracterizando-as com pequenas imprecisões	4 pontos
Identifica pelo menos 4 simetrias caracterizando-as com bastantes imprecisões	3 pontos
Identifica 2 ou três simetrias envolvidas	2 pontos
Identifica e/ou caracteriza alguma das simetrias envolvidas	1 pontos
Não identifica ou caracteriza qualquer simetria	0 pontos